UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

ANNALES
DE
L'INSTITUT FOURIER

PUBLIÉES AVEC LE CONCOURS
DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

TOME VIII (2e FASCICULE)

Année 1958

RÉDACTEURS

M. BRELOT, C. CHABAUTY et L. NÉEL

CHARTRES
IMPRIMERIE DURAND
9, RUE FULBERT, 9

1959

SOMMAIRE

(La reproduction des résumés ci-après rédigés par les auteurs eux-mêmes est autorisée.)

Pages

L'auteur montre qu'aux applications d'une variété V_p dans une variété W_n est associée sur la variété des jets $J^1(V_p, W_n)$ une forme extérieure Ω_{p+1} de degré $p+1$. Les fonctions qui définissent l'application, solutions du système extérieur $i(\vec{X})\Omega_{p+1} = 0$, sont solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre qui généralise celui d'Hamilton. Ce système est équivalent à un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre. A tout système correspond une forme de Pfaff sur $J^1(V_p, W_n)$. Les équations de la mécaniques Galiléenne des milieux continus à n dimensions sont engendrées par une forme Ω_{n+2} dont découle naturellement la forme Ω_2 génératrice des systèmes indéformables, sans l'intervention de postulats sur les forces intérieures.

Cet article donne diverses expressions d'une solution élémentaire relative à l'opérateur différentiel

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

où p et $q = n - p$ sont deux entiers positifs quelconques. La solution élémentaire construite est invariante vis-à-vis du groupe de toutes les transformations linéaires homogènes laissant $\Box$ invariant. On obtient aussi la solution élémentaire la plus générale invariante vis-à-vis de ce groupe, qui dépend de deux constantes arbitraires.

L'objet de ce mémoire d'ordre surtout méthodologique est de mettre en évidence l'intérêt du choix d'une fonctionnelle convenable (ici la transformation de Mellin) pour l'étude d'une classe de points singuliers de fonctions analytiques aux voisinages desquels ces fonctions ne sont pas uniformes.

Cette classe contient la sous-classe des points singuliers algébrico-logarithmiques rencontrés dans l'étude des solutions analytiques des équations différentielles linéaires et homogènes du type de Fuchs. La fonction « déterminante » est soumise à une transformation de Mellin prise sur un rayon issu du point singulier considéré et on étudie l'ensemble singulier de la fonction analytique transformée (la « génératrice »). Les résultats obtenus contiennent entre autres cas particuliers celui ou l'origine du rayon est point régulier pour la « déterminante »; la génératrice est alors entière et d'ordre à la Ritt égal à O dans toute demi-bande horizontale gauche du plan de sa variable. Inversement partant de la considération d'une fonction possédant un ensemble singulier convenablement précisé (par exemple se réduisant à des pôles en nombre fini dans un demi-plan) une transformation inverse de la précédente permet de retrouver le type de points singuliers étudiés. On peut ainsi mettre en évidence de nouvelles classes de points singuliers en considérant des fonctions génératrices dont les ensembles singuliers sont connus, en d'autres termes dans certains types de problèmes au lieu de caractériser un point singulier d'une fonction analytique par le comportement de cette fonction au voisinage de ce point il est plus intéressant de le caractériser par l'ensemble singulier de la transformée de cette fonction à l'aide d'une certaine fonctionnelle. L'auteur considère le plus souvent des fonctions définies par prolongement analytique de sommes de séries de Dirichlet générales et montre par des applications au problème de la composition (au sens Hadamard-Mandelbrojt) des singularités des fonctions analytiques définies de cette manière l'intérêt à la fois de la classe de points singuliers étudiés et de l'outil utilisé.

LES FORMES EXTÉRIEURES
ET LA MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

par F. GALLISSOT.

INTRODUCTION

Dans le tome IV des Annales de l'Institut Fourier (1952) j'ai montré le parti qu'on peut tirer dans l'étude de la mécanique des systèmes rigides, de l'existence d'une forme extérieure Ω_2 de degré deux, de rang maximum sur une variété V_{2n+1} différentiable, de dimension $2n+1$, génératrice des équations du mouvement. Il est alors naturel de se poser la question : les équations de la mécanique des milieux continus possèdent-elles une forme extérieure génératrice et quel est son support topologique.

Si l'on revient à la notion première de mouvement d'un milieu continu Galiléen à 3 dimensions (espace numérique ρ^3) observons que ce mouvement n'est autre qu'une application φ de classe C^r ($r \geqslant 2$) de l'espace numérique R^4 (produit de l'espace numérique R^3 par la droite numérique t) dans ρ^3. En relativité comme le temps est lié au milieu, le mouvement d'un milieu continu relativiste sera une application de R^4 dans ρ^4. Plus généralement nous sommes conduits à envisager des applications φ de classe C^r (r-applications) d'un espace R^p dans un espace ρ^n, puis d'une variété (V_p) dans une variété (W_n) et à associer à ces applications la variété des jets du premier ordre de M. Ehresmann J^1 (V_p, W_n). Nous démontrons que sur $J^1(V_p, W_n)$, $\xi(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) \in (W_n)$, $x(x^1, x^2, \ldots, x^p) \in (V_p)$,

il existe une forme extérieure Ω_{p+1} de degré $p+1$ dont les solutions du système extérieure associé $i(\overrightarrow{X})\Omega_{p+1}=0$ satisfaisant de plus à $d\xi^\sigma \wedge V_p = 0$ [V_p désigne la forme volume sur la variété (V_p)] sont solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre qui généralise celui d'Hamilton. Ce système est équivalent à un système d'équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre. Le système des équations d'Hamilton généralisées est déterminé dès qu'on se donne une forme de Pfaff ω sur la variété $J^1(V_p, W_n)$ et une forme volume V_p sur (V_p).

Pour les applications à la mécanique, tout revient à construire la forme Ω_{p+1} sur $J^1(V_p, W_n)$. Or à une mécanique est associé un groupe G qui opère sur (V_p, W_n) et par prolongement sur $J^1(V_p, W_n)$. Le groupe G laissant invariantes les équations de la mécanique, la forme Ω_{p+1} doit être invariante par G. Cette propriété permet de préciser la forme extérieure correspondant au cas de la mécanique Galiléenne. Il est important de noter que les équations de la mécanique des systèmes indéformables découlent naturellement de la forme Ω_{p+1} sans l'intervention de postulats sur les forces intérieures : elles sont engendrées par une forme Ω_2 de degré deux sur une variété de groupe de Lie de déplacements.

L'intérêt de ce point de vue est de dégager le sens profond des théorèmes classiques de la mécanique, de suggérer des recherches nouvelles. Le seul inconvénient est qu'il faut à peu près tout refaire, c'est pourquoi cet article se borne à fixer le cadre dans lequel on peut opérer avec fruit. Des articles ultérieures préciseront les points nouveaux.

CHAPITRE PREMIER

LES FORMES DIFFÉRENTIELLES EXTÉRIEURES SUR $J^1(V_p, W_n)$

§ 2. — Notions sur les Jets.

M. Ehresmann a montré (Congrès de Taormina 1951 et Colloque de Géométrie Différentielle de Strasbourg 1953) qu'à toute r-application d'une variété (V_p) dans une variété (W_n) on peut associer l'ensemble des jets $J^r\ (V_p, W_n)$ définie de la manière suivante :

Soit φ l'application d'un voisinage de $x \in V(_p)$ dans (W_n), x est la source de l'application, $\xi = \varphi(x) \in (W_n)$ en est le but. Considérons deux cartes locales admissibles g et γ de (V_p) et de (W_n) telles que u et y appartenant respectivement aux espaces numériques R^p et ρ^n on ait :

$$\begin{aligned} u \in R^p, \qquad x &= g(u), \\ y \in \rho^n, \qquad \xi &= \varphi(x) = \gamma(y). \end{aligned}$$

La composition des applications suggérée par le diagramme

$$\begin{tikzcd} V_p \arrow[r, "\varphi"] & W_n \\ R^p \arrow[u, "g"] \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & \rho_n \arrow[u, "\gamma"'] \end{tikzcd}$$

conduit à envisager la restriction $\underline{g}$ de g à un voisinage $\overline{U}$ de u tel que l'application composée $\overline{\varphi} = \gamma^{-1} \circ \varphi \circ \underline{g}$ soit définie. On dit que φ est une r-application au point x lorsque l'application $\overline{\varphi}$ de U dans ρ^n admet dans un voisinage du point u des dérivées partielles continues de chaque espèce jusqu'à l'ordre

r par rapport aux coordonnées canoniques dans R^p. Soit $C_x^r(V_p, W_n)$ l'ensemble des applications (φ, x) où φ est une r-application au point x. Deux éléments (φ_1, x), (φ_2, x) de $C_x^r(V_p, W_n)$ seront dits de même r-classe :

1° si $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$,

2° si le couple de cartes locales (g, γ) associe à φ_1 et φ_2 deux applications $\bar{\varphi}_1$ et $\bar{\varphi}_2$ dont les dérivées partielles de même espèce d'ordre $\leqslant r$ prennent la même valeur au point u.

Ces définitions sont indépendantes du couple de cartes locales (g, γ) puisqu'il suffit de considérer un autre couple (g', γ') recouvrant partiellement le premier.

1. Définition d'un jet. — Un jet infinitésimal d'ordre r ou r-jet de (V_p) dans (W_n) est une r-classe de $C_x^r(V_p, W_n)$ dont x est la source. $j_x^r\xi$ désigne le r-jet déterminé par le couple $(\xi, x) \in C_x^r(V_p, W_n)$. L'ensemble des r-jets de (V_p) dans (W_n) de source x est noté $J_x^r(V_p, W_n)$. La réunion des $J_x^r(V_p, W_n)$ pour x décrivant V_p est appelée variété des jets d'ordre r.

$$\bigcup_{x \in V_p} J_x^r(V_p, W_n) = J^r(V_p, W_n).$$

2. Ensemble des jets d'ordre 1 : $J^1(V_p, W_n)$. — L'ensemble des jets d'ordre 1 $J^1(R^p, \rho^n)$ est homéomorphe à la variété $R^p \times N_{pn}^1 \times \rho^n$ à $np + n + p$ dimensions dans laquelle un point a pour coordonnées canoniques :

$(x^1, x^2, \ldots, x^p, u_1^1, \ldots, u_i^\sigma, \ldots, u_p^n, \xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$ les ξ^σ désignant les coordonnées dans ρ^n, les x^i les coordonnées dans R^p, $u_i^\sigma = \dfrac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i}$ la dérivée partielle de ξ^σ par rapport à x^i. Lorsqu'il s'agira de $J^1(V_p, W_n)$ l'ensemble précédent constitue un système de coordonnées locales de cette variété.

3. Noyau des jets d'ordre 1. — Nous appellerons noyau de $J^1(R^p, \rho^n)$ noté N_{pn}^1 un élément de source 0 et de but 0, c'est-à-dire ayant pour np coordonnées canoniques $(0, \ldots, 0; \ldots, u_i^\sigma \ldots, 0, \ldots, 0)$.

Pour donner une signification intrinsèque au noyau de l'ensemble des jets $J^1(V_p, W_n)$ nous ferons les remarques suivantes :

a) Les éléments de $J^1(R, W_n)$ de source 0, ayant pour coordonnées $(0, u^1, \ldots, u^n, \xi^1, \ldots, \xi^n)$ ne sont autres que les vecteurs

tangents à (W_n) dont l'ensemble est noté $T(W_n)$ $T(W_n)$ est un espace fibré de base (W_n), de fibre R^n.

Les éléments de $J^1(R^p, W_n)$ de source 0, de but ξ, ne sont autres que les éléments du produit de p exemplaires de l'espace tangent à (W_n) au point ξ.

$J^1_{x=0}(R^p, W_n)$ est un espace fibré ayant pour base (W_n) pour fibre R^{np}, on note cet espace $T_p(W_n)$. Il existe une projection canonique de $J^1(R^p, W_n)$ sur R^p, ce qui suggère que $J^1(R^p, W_n)$ est une variété fibrée ayant pour base R^p, pour fibre $T_p(W_n)$ pour groupe structural $GL(n)$, groupe linéaire et homogène de R^n.

Si on considère $J^1(V_p, W_n)$ comme il existe une projection canonique A de $J^1(V_p, W_n)$ sur (V_p), relativement à cette projection A, $J^1(V_p, W_n)$ est un espace fibré, ayant pour base (V_p), pour fibre $T_p(W_n)$, pour groupe structural $GL(n)$.

b) Les éléments de $J^1(V_p, \rho)$ de but 0 ne sont autres que les co-vecteurs tangents à (V_p) dont l'ensemble est noté $T^*(V_p)$. C'est un espace fibré de base (V_p), de fibre R^{p*}. Les éléments de $J^1(V_p, \rho^n)$ de but 0, de source x, ne sont autres que les éléments du produit de n exemplaires du dual de l'espace tangent à (V_p) au point x. $J^1_{\xi=0}(V_p, \rho^n)$ est un espace fibré, ayant pour base (V_p) pour fibre R^{pn}, on note cet espace $T^*_n(V_p)$. Il existe une projection canonique de $J^1(V_p, \rho^n)$ sur ρ^n, ce qui suggère que $J^1(V_p, \rho^n)$ est une variété fibrée ayant pour base ρ^n, pour fibre $T^*_n(V_p)$, pour groupe structural $GL(p)$, groupe linéaire et homogène de R^p.

Si on considère $J^1(V_p, W_n)$, comme il existe une projection canonique B de $J^1(V_p, W_n)$ sur (W_n), relativement à cette projection B, $J^1(V_p, W_n)$ est un espace fibré ayant pour base (W_n) pour fibre $T^*_n(V_p)$, pour groupe structural $GL(p)$.

c) Il existe une projection canonique C de $J^1(V_p, W_n)$ sur $(V_p \times W_n)$. Relativement à cette projection canonique C, $J^1(V_p, W_n)$ est une variété fibrée ayant pour base $(V_p \times W_n)$, pour fibre le noyau de $J^1(V_p, W_n)$, pour groupe structural $GL(n) \times GL(p)$. Le noyau de $J^1(V_p, W_n)$ est homéomorphe à l'espace homogène $L(R^p, \rho^n)$ des applications linéaires et homogènes de R^p dans ρ^n.

Remarque. — Ces considérations s'étendent à $J^r(V_p, W_n)$ (Cf. M. Ehresmann [3]).

4. Changement de coordonnées dans le noyau de $J^1(V_p, W_n)$. — Si on considère un changement de coordonnées locales dans (W_n) défini par les formules :

$$\xi^\sigma = \varphi^\sigma(\eta^1, \ldots, \eta^\rho, \ldots, \eta^n).$$

nous poserons

$$\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial \eta^\rho} = \alpha^\sigma_\rho.$$

Si on considère un changement de coordonnées dans R^p, coordonnées locales de V_p, défini par les formules

$$x^i = f^i(y^1, y^2, \ldots, y^p)$$

nous poserons

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^j} = a^i_j.$$

Si on considère les changements de coordonnées inverses des précédents nous écrirons en soulignant les dérivées partielles

$$\frac{\partial n^\rho}{\partial \xi^\sigma} = \underline{\alpha}^\rho_\sigma, \qquad \frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \underline{a}^j_i.$$

Si on désigne par $V^\rho_j = \dfrac{\partial \eta^\rho}{\partial y^j}$ les nouvelles coordonnées canoniques du noyau de $J^1(V_p, W_n)$ de la relation

$$u^\sigma_i = \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} = \frac{\partial \eta^\rho}{\partial \xi^\sigma} \cdot \frac{\partial \eta^\rho}{\partial y^j} \cdot \frac{\partial y^j}{\partial x^i}$$

résulte

$$u^\sigma_i = \alpha^\sigma_\rho \underline{a}^j_i v^\rho_j \tag{1}$$

formule qui montre que les coordonnées canoniques de $J^1(V_p, W_n)$ peuvent être identifiées aux composantes d'un tenseur construit sur le produit tensoriel des espaces T_ξ et T^*_x, en désignant par T_ξ l'espace tangent à (W_n) au point ξ et par T^*_x le dual de l'espace tangent à (V_p) au point x. $u^\sigma_i \in T_\xi \otimes T^*_x$.

6. **Coordonnées hamiltoniennes dans le noyau de $J^1(V_p, W_n)$.** — Dans le développement que nous avons en vue, il est très avantageux d'introduire dans le noyau des jets d'ordre 1, un autre système de coordonnées que nous appellerons coordonnées Hamiltoniennes, eu égard au rôle qu'elles jouent

dans l'écriture d'un certain système d'équations aux dérivées partielles définissant une famille d'applications de (V_p) dans (W_n).

Nous nous donnons sur (V_p) une forme volume V_p. Considérons les tenseurs $p_{\sigma i_1, \ldots, i_{p-1}}$ covariants d'ordre p complètement anti-symétriques, construit sur $T^*(W_n)$ et $T^{p-1*}(V_p)$. Au moyen du tenseur volume unité sur la variété (V_p) de composantes contravariantes $\delta^{i_1, \ldots, i_p}$ on définit par contraction un tenseur p^i_σ une fois covariant, une fois contravariant

$$\frac{1}{(p-1)!} p_{\sigma i_1, \ldots, i_{p-1}} \delta^{i_1, \ldots, i_p} = p^{i_p}_\sigma.$$

Le tenseur p^i_σ est un élément de $T^*_\xi \otimes T_x$. Si on considère la variété $J^1(W_n, V_p)$ les p^i_σ sont les coordonnées canoniques du noyau de l'ensemble des jets de (W_n) dans (V_p) inverses, des jets de (V_p) dans (W_n), comme le montre la règle de changements de coordonnées

$$p^i_\sigma = \underline{\alpha}^\rho_\sigma a^i_j q^j_\rho.$$

Or $J^1(W_p, V_n)$ et $J^1(V_n, W_p)$ sont deux variétés fibrées ayant même base $W_n \times V_p$ même fibre $L(R^p, \rho^n)$ qui est l'espace des applications linéaires et homogènes de R^p dans ρ^n. Pour cette raison on peut prendre pour coordonnées dans le noyau de $J^1(V_p, W_n)$ les p^i_σ. Mais il est essentiel de remarquer que nous n'avons présentement aucun moyen d'exprimer les coordonnées canoniques u^σ_i en fonction des p^i_σ, la structure impliquée par une forme extérieure Ω_{p+1} définie ultérieurement, permettra de lier les p^i_σ aux u^σ_i.

Les p^i_σ pouvant être utilisées comme coordonnées dans le noyau de $J^1(V_p, W_n)$, il en est de même des composantes des tenseurs complètement antisymétriques d'ordre p défini par le produit contracté des p^i_σ avec les composantes covariantes du tenseur volume unité sur (V_p).

$$(2) \qquad p_{\sigma i_1, \ldots, i_{p-1}} = \frac{1}{p} \delta_{i_1, \ldots, i_p} p^i_\sigma.$$

C'est aux composantes du tenseur complètement antisymétrique p fois covariant $p_{\sigma i_1, \ldots, i_{p-1}}$ que nous donnons le nom de coordonnées Hamiltoniennes du noyau de $J^1(V_p, W_n)$.

Notation. — Quand on assigne un ordre aux coordonnées dans (V_p) qui est l'ordre naturel, pour signifier que dans $p_{\sigma 12,\ldots,p}$ l'indice i est seul omis on écrit :

$$p_{\sigma \check{i}} = \grave{\delta}_{12,\ldots,p} p^i_\sigma.$$

7. Coordonnées pratiques dans le noyau de $J^1(V_p, W_n)$. — Lorsque le système de coordonnées locales a été choisi dans (W_n) et (V_p) et de plus lorsqu'on assigne un ordre aux coordonnées dans (V_p), il est commode d'utiliser dans les calculs comme coordonnées dans le noyau de l'ensemble des jets, les quantités p^i_σ qui peuvent être identifiées aux composantes d'un tenseur mixte construit sur les espaces T^*_ξ et T_x.

§ 2. — Les formes différentielles sur $J^1(V_p, W_n)$

1. Vecteur $\overrightarrow{p_\sigma}$ et forme $\theta(\overrightarrow{p_\sigma})V_p$. — Nous désignerons par $\overrightarrow{p_\sigma}$ le vecteur contravariant de source 0 et de but 0 de composantes $0, 0, \ldots, 0;\ p^1_\sigma, \ldots\ p^i_\sigma, \ldots\ p^p_\sigma;\ 0 \ldots 0)$. L'application canonique A de $J^1(V_p, W_n)$ dans (V_p), déjà envisagée § 1,3, fait correspondre à la forme volume V_p définie sur (V_p) une forme V'_p sur $J^1(V_p, W_n)$. L'opérateur des transformations infinitésimales[1] $\theta(\overrightarrow{p_\sigma})$ fait correspondre à la forme V'_p une forme de degré p sur $J^1(V_p, W_n)$: $\theta(\overrightarrow{p_\sigma})V'_p$.

Ainsi dans le cas particulier où (V_p) est une variété riemannienne, dont le tenseur métrique fondamental est g_{ij}, la forme volume V_p classique a pour expression en désignant par g le déterminant g_{ij}

$$V_p = \sqrt{g}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^p$$

$$\theta(p_\sigma)V'_p = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1} \sqrt{g}\, dp^i_\sigma \wedge dx^1 \wedge dx^2 \ldots \wedge d\check{x}^i \wedge \ldots \wedge dx^p \tag{3}$$

le signe $\vee$ placé au-dessus de dx^i signifiant que ce signe est omis.

Remarque. — Dans l'expression précédente on observera que d désigne le symbole de la différentiation absolue.

[1] Cf M. H. Cartan Colloque Topologie. Bruxelles 1950.

2. Forme $\Phi_{p+1} = \sum_{\sigma=1}^{n} d\xi^\sigma . \theta(p_\sigma) V'_p$. — Les n formes $d\xi^\sigma$ sur W_n remontent au moyen de l'application B (§ 1,3) sur $J^1(V_p, W_n)$. Elles engendrent par produit extérieur avec les n formes $\theta(p_\sigma)V'_p$ et sommation par rapport à l'indice σ une forme Φ_{p+1} de degré $p+1$ dont le support est $J^1(V_p, W_n)$. Cette forme fermée peut d'après les considérations développées dans le § 1,6 être considérée comme engendrée par un tenseur complètement anti-symétrique $p_{\sigma i_1, \dots, i_{p-1}}$ construit sur les espaces T^*_ξ et $(T^*_x)^{p-1}$.

On a alors $\Phi_{p+1} = \dfrac{-1}{(p-1)!} d(p_{\sigma i_1, \dots, i_{p-1}}) \wedge d\xi^\sigma \wedge dx^{i_1} \wedge \dots dx^{i_{p-1}}$.

Cette expression de Φ_{p+1} est trivialement invariante dans un changement de coordonnées locales de $J^1(V_p, W_n)$ ce qui montre que Φ_{p+1} est une forme intrinsèque sur $J^1(V_p, W_n)$.

3. Forme génératrice Ω_{p+1}. — Nous désignerons par ω une forme de Pfaff sur $J^1(V_p, W_n)$. Dans un système de coordonnées pratiques ω s'écrit

$$\omega = \sum_{i,\sigma} X^\sigma_i dp^i_\sigma + X_\sigma d\xi^\sigma.$$

Nous appellerons pour des raisons justifiées par le théorème I, forme génératrice Ω_{p+1} la forme de degré $p+1$ définie sur $J^1(V_p, W_n)$

$$\Omega_{p+1} = \Phi_{p+1} + \omega \wedge V'_p. \tag{4}$$

Donnons l'expression de Ω_{p+1} dans un système de coordonnées Hamiltoniennes. Lorsque tous les indices courent de 1 à p la forme volume s'écrit :

$$V'_p = \frac{1}{p!} \delta_{i_1, \dots, i_p} dx^{i} \wedge \dots \wedge dx^{i_p},$$

$$\omega \wedge V'_p = X^\sigma_i dp^i_\sigma \frac{1}{p!} \delta_{i_1, \dots, i_p} dx^{i} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

$$= \frac{1}{(p-1)!} X^\sigma_i dp_{\sigma i_1, \dots, i_{p-1}} \wedge dx^{i_1} \dots \wedge dx^{i_p},$$

en tenant compte de la formule (2) qui définit les coordonnées Hamiltoniennes. D'où l'expression Ω_{p+1}.

$$\Omega_{p+1} = \frac{1}{(p-1)!} dp_{\sigma i_1, \dots, i_{p-1}} \wedge (- d\xi^\sigma \wedge dx^{i_1} \cdots dx^{i_{p-1}} + X^\sigma_i dx^{i_1} \dots \wedge dx^{i_p}). \tag{5}$$

Cette expression de Ω_{p+1} est trivialement invariante dans un changement de coordonnées Hamiltoniennes, en entendant par cette expression un changement de coordonnées arbitraires sur (V_p) et (W_n) et un changement de coordonnées Hamiltoniennes sur le noyau de $J^1(V_p, W_n)$.

Remarque. — Dans ω il est inutile d'écrire la partie de cette forme de Pfaff qui est sur (V_p) puisqu'elle disparaît dans la multiplication extérieure par la forme volume.

4. Système des formes extérieures associé à Ω_{p+1}. — $\vec{X}$ étant un champ de vecteurs arbitraires sur $J^1(V_p, W_n)$ on appelle ainsi le système des équations extérieures $i(\vec{X})\Omega_{p+1} = 0$ réductible à $(np + n + p)$ équations, où $i(\vec{X})$ désigne l'antidérivation de M. H. Cartan. Les coordonnées Hamiltoniennes n'étant utiles que dans les questions théoriques, en particulier pour montrer le caractère intrinsèque de certaines formes, lorsqu'il s'agit d'effectuer les calculs il faut utiliser les coordonnées pratiques. Dans ce système de coordonnées Ω_{p+1} s'écrit :

$$(6) \quad \Omega_{p+1} = \sqrt{g}(-1)^{i+1}\, d\xi^\sigma \wedge dp^i_\sigma \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge d\check{x}^i \wedge \ldots \wedge dx^p$$
$$+ \sqrt{g}(X^i_\sigma\, dp^\sigma_i + X_\sigma\, d\xi^\sigma)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p.$$

Le système des équations associées $i(X)\Omega_{p+1}$ peut en particulier se mettre sous la forme suivante :

n équations du type

$$(7) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial\Omega_{p+1}}{\partial(dp^i_\sigma)} = (-1)^i\, d\xi^\sigma \wedge dx^1 \wedge \ldots d\check{x}^i \wedge \ldots \wedge dx^p$$
$$+ X^\sigma_i\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p = 0$$

np équations du type

$$(8) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial\Omega_{p+1}}{\partial(d\xi^\sigma)} = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+1}\, dp^i_\sigma \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge d\check{x}^i \wedge \ldots \wedge dx^p$$
$$+ X_\sigma\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p = 0$$

p équations du type

$$(9) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial\Omega_{p+1}}{\partial(dx^j)} = \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i+j+1}\, d\xi^\sigma \wedge dp^i_\sigma \wedge dx^1 \ldots \wedge d\check{x}^i \wedge$$
$$\ldots d\check{x}^j \wedge \ldots dx^p + (-1)^j \omega \wedge dx^1 \ldots dx^j \ldots \wedge dx^p.$$

Théorème 1. — *Si le jacobien à np éléments* $\dfrac{D(\ldots X^\sigma_i \ldots)}{D(\ldots p^i_\sigma \ldots)}$ *n'est pas nul, les solutions du système* $i(\vec{X})\Omega_{p+1} = 0$ *satisfaisant*

de plus aux n équations $d\xi^\sigma \wedge V_p = 0$ *sont localement les solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles linéaires* (H) *équivalent aux solutions d'un système de n équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre* $S_{2,n}(\xi^\sigma)$, *par rapport aux variables* x^i.

Cherchons les solutions du système extérieur $i(\vec{X})\Omega_{p+1} = 0$, telles que les ξ^σ soient des fonctions des x^i de classe C^r, $r \geqslant 2$.

Les np équations $\dfrac{\partial\Omega_{p+1}}{\partial(dp^i_\sigma)} = 0$ donnent :

$$\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^i} = X^\sigma_i. \tag{10}$$

Les X_i sont des fonctions des coordonnées locales de $J^1(V_p, W_n)$. Si $\dfrac{D(\dots X^\sigma_i \dots)}{D(\dots p^i_\sigma \dots)} \neq 0$ les équations (10) définissent les p^i_σ en fonction des $\dfrac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^i} = u^\sigma_i$ coordonnées canoniques du noyau de $J^1(V_p, W_n)$.

Localement on a donc

$$p^i_\sigma = \varphi^i_\sigma\left(\frac{\partial\xi^\rho}{\partial x^j}, x^h, \xi^\mu\right) \tag{11}$$

h, j étant des nombres arbitraires de l'ensemble (1 à p) ρ et μ des nombres arbitraires de l'ensemble (1 à n). Les p^i_σ au moyen des équations (10) deviennent ainsi les composantes de n champs de vecteurs $\vec{p_\sigma}$, σ(1 à n) sur (V_p). Par rapport au repère au point x de (V_p) la différentielle de p^i_σ est en désignant par Γ^i_{hj} les coefficients de la connexion infinitésimale sur (V_p)

$$dp^i_\sigma = \frac{\partial p^i_\sigma}{\partial x^j} dx_j + \Gamma^i_{hj} p^h \, dx^j = \frac{D(p^i_\sigma)}{Dx^j} dx^j.$$

Les n équations $\dfrac{\partial\Omega_{p+1}}{\partial(\xi^\sigma)} = 0$ donnent alors en utilisant le symbole D pour indiquer une dérivation absolue :

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{Dp^i_\sigma}{Dx^i} + X_\sigma = 0. \tag{12}$$

Le système (12) lorsqu'on tient compte de la solution (11) des équations (10) donne naissance à un système d'équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre $S_{n,2}(\xi^\sigma)$.

Montrons maintenant que les p dernières équations du sys-

tème associé sont vérifiées comme conséquence de (11) et (12). Quand on considère les p^i_σ comme des fonctions des x^i par l'intermédiaire des fonctions ξ^σ et de leurs dérivées partielles du premier ordre, une équation $\frac{\partial \Omega_{p+1}}{\partial(dx^j)} \cdot \frac{1}{\sqrt{g}}$ s'écrit :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \Omega_{p+1}}{\partial(dx^j)} = -\sum_{i\sigma} \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} & \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^j} \\ \frac{D p^i_\sigma}{D x^i} & \frac{D p^i_\sigma}{D x^j} \end{vmatrix} + \sum_{\sigma=1}^{n} X_\sigma \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^j} + \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} X^\sigma_i \frac{D p^i_\sigma}{D x^j}$$

$$= \sum_{\sigma=1}^{n} \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} \left[\sum_{i=1}^{p} \frac{D p^i_\sigma}{D x^i} + X_\sigma \right] - \sum_{\sigma, i} \frac{D p^i_\sigma}{D x^j} \left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} - X^\sigma_i \right).$$

Le second membre est donc nul comme conséquence des équations (10) et (12).

Remarques — 1) Il est bien évident que ce n'est que localement que les solutions des équations $i(\vec{X})\Omega_{p+1} = 0$, $d\xi^\sigma \wedge V_p = 0$ sont représentées par les solutions du système $S_{2,n}(\xi^\sigma)$.

2) C'est le système des équations (10) qui définit le système des coordonnées pratiques p^i_σ en fonction des coordonnées sur le noyau de $J^1(V_p, W_n)$. On voit que ce système s'obtient en égalant à la coordonnée canonique u^σ_i le coefficient X^σ_i de la forme de Pfaff ω.

$$(13) \qquad X^\sigma_i(p^j_\rho, x^h, \xi^u) = u^\sigma_i.$$

Les indices latins prennent toutes les valeurs de 1 à p, les indices grecques toutes les valeurs de 1 à n.

3) Si la forme de Pfaff ω est homologue à 0, $\omega = dE$, la forme Ω_{p+1} est alors fermée $d\Omega_{p+1} = 0$. On peut écrire puisque $d[\theta(\vec{p_\sigma})V_p] = 0$

$$\Omega_{p+1} = d\left[\sum_{\sigma=1}^{n} \xi^\sigma \theta(\vec{p_\sigma}) V_p + E V_p\right].$$

Le système des équations (10) et (12) prend la forme :

$$(14) \qquad \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} = \frac{\partial E}{\partial p^i_\sigma}$$

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{D p^i_\sigma}{D x^i} = -\frac{\partial E}{\partial \xi^\sigma}.$$

Cette forme (14) est la généralisation des équations d'Hamilton qu'on obtient pour $p = 1$. Géométriquement si on consi-

dère les applications de la droite numérique t dans (W_n), il leur est associé la variété des jets $J^1(t, W_n)$ qui est un espace fibré ayant pour base la droite numérique t pour fibre l'espace tangent à (W_n) : $T(W_n)$. Les éléments $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont identifiés aux composantes de la co-vitesse dans (W_n). C'est pour cette raison que nous appellerons système d'Hamilton généralisé le système des équations (14).

4) Si l'espace numérique à p dimensions R^p est rapporté à un système de coordonnées cartésiennes et si la fonction E est une forme quadratique à coefficients constants sur

$$J^1(R^p, W_n),$$

le système $S_{2,n}$ (ξ^σ) est à coefficients constants. Ω_{p+1} est la forme génératrice de ce système d'équations aux dérivées partielles du second ordre à coefficients constants.

5) Les np fonctions p^i_σ sur (V_p) sont également solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles qui s'obtient en écrivant que les n formes $\sum_{i=1}^{p} X^\sigma_i \, dx^i$ sont fermées.

6) Si $\dfrac{D(\ldots X^\sigma_i \ldots)}{D(\ldots p^i_\sigma \ldots)} = 0$, il se présente des circonstances très variées. Le système $i(\vec{X})\Omega_{p+1} = 0$ peut n'avoir pas de solutions, ou bien il en admet construites au moyen des solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre [les systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre sont des sous-variétés de $J^1(V_p, W_n)$] ou encore il n'admet de solutions que pour les jets relatifs aux applications partielles d'une partie de (V_p) dans (W_n).

5° Pour familiariser le lecteur avec les notions précédentes nous traitons quelques exemples qui pour simplifier sont relatifs à la détermination d'une fonction numérique sur une variété (V_p). Aux applications de (V_p) dans la droite numérique ρ est associé la variété $J^1(V_p, \rho)$.

a) $p = 2$, $V_2 = R^2$. Les applications de R^2 dans ρ sont définies par une fonction numérique de deux variables x^1, x^2, coordonnées rectangulaires d'un point de R^2. En utilisant des coordonnées pratiques sur $J^1(R^2, \rho)$ p^1, p^2, soit la forme de Pfaff donnée :

$$\omega = p^1 dp^1 + kp^2 dp^2 + g(x^1, x^2, p^1, p^2, \xi) d\xi$$

dans laquelle k désigne une constante. La forme génératrice Ω_3 est :

$$\Omega_3 = d\xi \wedge dp^1 \wedge dx^2 + d\xi \wedge dx^1 \wedge dp^2 + (p^1 dp^1 + kp^2 dp^2 + g d\xi) \wedge dx^1 \wedge dx^2.$$

Le système associé $i(\vec{X})\Omega_3 = 0$ peut en particulier se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial \Omega_3}{\partial (dp^1)} = - d\xi \wedge dx^2 + p^1 dx^1 \wedge dx^2 = 0$$
$$\frac{\partial \Omega_3}{\partial (dp^2)} = d\xi \wedge dx^1 + kp^2 dx^1 \wedge dx^2 = 0$$
$$\frac{\partial \Omega_3}{\partial (d\xi)} = dp^1 \wedge dx^2 + dx^1 \wedge dp^2 + g\, dx^1 \wedge dx^2 = 0.$$

Le théorème 1 nous dispense d'écrire les autres équations. Les solutions de ce système extérieur telles que ξ soit une fonction sur R^2 sont pour les deux premières :

$$\frac{\partial \xi}{dx^1} = p^1 \qquad \frac{\partial \xi}{dx^2} = kp^2.$$

Le jacobien $\dfrac{D(X_1,\ X_2)}{D(p_1,\ p_2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k.$

Si $k \neq 0$, p^1 et p^2 étant des fonctions de x^1 et x^2, $p^1 = \dfrac{\partial \xi}{\partial x^1}$, $p^2 = \dfrac{1}{k} \dfrac{\partial \xi}{\partial x^2}$ la troisième équation extérieure donne alors :

$$\frac{\partial p^1}{\partial x^1} + \frac{\partial p^2}{\partial x^2} + g = 0$$

d'où l'équation aux dérivées partielles du second ordre équivalente aux 3 équations précédentes :

$$S_{2,\,1}(\xi) \quad \frac{\partial^2 \xi}{(\partial x^1)^2} + \frac{1}{k} \frac{\partial^2 \xi}{(\partial x^2)^2} + g\left(x^1,\ x^2,\ \frac{\partial \xi}{\partial x^1},\ \frac{1}{k} \frac{\partial \xi}{\partial x^2},\ \xi\right) = 0$$

du type elliptique si $k > 0$, hyperbolique si $k < 0$.

Si $k = 0$, le jacobien $\dfrac{D(X_1,\ X_2)}{D(p^1,\ p^2)} = 0$, on ne peut plus dire que p^2 est une fonction de x^1, x^2. Une solution possible du système $i(X)\Omega_3 = 0$ est constituée par $dp^2 = 0$. On peut envisager la forme $\tilde{\Omega}_3$ induite par Ω_3 sur les sous-variétés $p^2 =$ const. Elle permet de déterminer ξ comme appartenant à la classe

des applications de la droite numérique x^1 dans la droite numérique ρ. Dans ce cas $\tilde{\Omega}_3 = \Omega_2 \wedge dx^2$, x^2 étant considéré comme constant. ξ est déterminé comme solution du système caractéristique de Ω_2.

b) Prenons encore $p = 2$, $V_2 = R^2$ et pour ω la forme

$$\omega = - p^2\, dp^1 + (p^1 + p^2)\, dp^2 + g\, d\xi$$

dans laquelle g désigne une fonction arbitraire de x^1, x^2, p^1, p^2, ξ. Un calcul analogue au précédent montre que les solutions des équations $i(X)\,\Omega_3 = 0$ telles que ξ soit une fonction sur R^2 sont localement les solutions de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique :

$$S_{2,1}(\xi) \quad \frac{\partial^2\xi}{(\partial x^1)^2} + g\left(x^1,\ x^2,\ \frac{\partial\xi}{\partial x^1} + \frac{\partial\xi}{\partial x^2},\ -\frac{\partial\xi}{\partial x^1},\ \xi\right) = 0.$$

c) Pour p quelconque, $V_p = R^p$ rapporté à des coordonnées cartésiennes proposons-nous de trouver la forme Ω_{p+1} génératrice des fonctions harmoniques sur R^p. Tout revient à déterminer ω. Observons d'une part que $\Delta\xi = \operatorname{div} . \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \xi$ d'autre part que le système des équations (10) et (12) s'écrit :

$$\frac{\partial\xi}{\partial x^i} = X_i(p^1,\ \ldots,\ p^p,\ x^1,\ \ldots,\ x^p,\ \xi)$$

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial p^i}{\partial x^i} = - X.$$

Si on considère le vecteur $\vec{p}(p^i)$ la dernière équation signifie que $\operatorname{div} \vec{p} = - X$. On a donc une solution en prenant $X = 0$, $X_i = p^i$, c'est-à-dire $\omega = p^i\, dp^i$ ou

$$\omega = \frac{1}{2}\, d\left(\text{Norme } \vec{p}\right).$$

Il résulte de là un moyen fort simple d'obtenir le Laplacien d'une fonction en coordonnées curvilignes que nous désignons par $q^1, \ldots q^p$. Le tenseur métrique étant g_{ij}, $\vec{p}$ désignant un vecteur de R^p, Norme $(\vec{p}) = g_{ij} p^i p^j$, considérons la forme

$$\Omega_{p+1} = d\xi \wedge \theta(\vec{p})V_p + \left[d \text{ Norme } (\vec{p}) + X\, d\xi\right] \wedge V_p$$

qui s'écrit au moyen des coordonnées curvilignes

$$\Omega_{p+1} = \Sigma(-1)^{i+1}\sqrt{g}\,d\xi \wedge dp^i \wedge dq^1 \dots d\check{q}^i . \wedge dq^p$$
$$+ \frac{1}{2}\sqrt{g}\,d(g_{ij}p^ip^j) + X\,d\xi \wedge \sqrt{g}\,dq^1 \wedge \dots \wedge dq^p.$$

Du système associé résulte :

$$\frac{\partial\xi}{\partial x^i} = g_{ij}p^j \qquad X = \frac{-1}{\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial(p^i\sqrt{g})}{\partial q^i}$$

soit

$$\Delta\xi = -X = \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial\left(\sqrt{g}\,g^{ij}\frac{\partial\xi}{\partial x^j}\right)}{\partial q^i}.$$

Il suffit en effet d'écrire l'équation $\frac{\partial\Omega_{p-1}}{\partial(d\xi)} = 0$ sous la forme :

$$\Sigma(-1)^{i+1}\left[d\left(p^i\sqrt{g}\right) - p^i d\sqrt{g}\right] \wedge dq^1 \wedge \dots \wedge d\check{q}^i, \dots \wedge dq^p$$
$$+ X\sqrt{g}\,dq^1 \wedge \dots \wedge dq^p = 0$$

ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{D\left(p^i\sqrt{g}\right)}{Dq^{ii}} - \sum_{i=1}^{p} p^i \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial q^i} + X\sqrt{g} = 0$$

ou

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial\left(p^i\sqrt{g}\right)}{\partial q^i} + \Gamma^i_{ji}p^j\sqrt{g} - \sum_{i=1}^{p} p^i \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial q^i} + X\sqrt{g} = 0$$

ce qui donne le résultat cherché en remarquant que

$$\Gamma^i_{ji} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\partial\sqrt{g}}{\partial q^j}.$$

Si maintenant on considère une variété riemannienne (V_p), un vecteur $\vec{p}$ tangent à (V_p) est un élément de $J^1(V_p, \rho)$ de but 0, au moyen de la forme Ω_{p+1} et de son système associé on engendre une classe de fonctions qui dans le cas où la norme est toujours positive sont des fonctions harmoniques sur des ouverts de (V_p).

Ainsi sur la sphère S_2 rapportée aux coordonnées longitude θ,

colatitude φ la forme $V_2 = R^2 \sin\varphi \, d\theta \wedge d\varphi$, le vecteur $\vec{p}$ a par rapport au repère naturel pour coordonneés p^1, p^2 pour norme $N(\vec{p}) = R^2 [\sin^2\varphi (p^1)^2 + (p^2)^2]$. La forme

$$\Omega_3 = R^2 \sin\varphi \, d\xi \wedge (dp^1 \wedge d\varphi - dp^2 \wedge d\theta) \\ + (p^1 \, dp^1 \sin^2\varphi + p^2 \, dp^2) R^4 \sin\varphi \, d\varphi \wedge d\varphi$$

donne pour équations associées :

$$\frac{d\xi}{\partial\theta} = p^1 \sin^2\varphi \, R^2, \qquad \frac{d\xi}{\partial\varphi} = p^2 R^2, \qquad \frac{Dp^1}{D\theta} + \frac{Dp^2}{D\varphi} = 0,$$

d'après une remarque précédente on peut remplacer cette dernière équation par l'équation $\dfrac{\partial(p^1\sqrt{g})}{\partial\theta} + \dfrac{\partial(p^2\sqrt{g})}{\partial\varphi} = 0$ ce qui donne l'équation du second ordre

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2\xi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\xi}{\partial\varphi^2} + \operatorname{cotg}\varphi \frac{\partial\xi}{\partial\varphi} = 0.$$

THÉORÈME 2. — *Si la forme de Pfaff ω sur $J^1(R^p, \rho^n)$ est à coefficients constants sur le noyau, les solutions du système associé $i(\vec{X})\Omega_{p+1} = 0$ qui sont des fonctions sur R^p définissent une application linéaire de R^p dans ρ^n.*

Les C_i^σ étant des constantes, si $\omega = \Sigma C_i^\sigma \, dp_\sigma^i$, les np premières équations (10) donnent

$$\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^i} = C_i^\sigma$$

d'où $\xi^\sigma = C_i^\sigma x^i + C^\sigma$. Cette solution satisfait aux autres équations du système $i(\vec{X})\Omega_{p+1} = 0$. Cette solution constitue le représentant polynomial de $J^1(V_p, W_n)$, si les C^σ sont nuls.

Conséquence. — On peut par addition de cette solution toujours supposer que la forme de Pfaff est à coefficients non constants sur le noyau de $J^1(V_p, W_n)$.

THÉORÈME 3. — *A toute forme de Pfaff ω sur $J^1(V_p, W_n)$ correspond un système d'équations aux dérivées partielles* (H) *et réciproquement.*

En effet à $\omega = X_i^\sigma \, dp_\sigma^i + X_\sigma \, d\xi^\sigma$ correspond d'après le théorème I le système

$$(\mathrm{H}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} = X_i^\sigma, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\mathrm{D}p_\sigma^i}{\mathrm{D}x^i} = -X_\sigma \quad \sigma(1 \text{ à } n). \end{array} \right.$$

Réciproquement à tout système (H) donné, les seconds membres X_i^σ, X_σ sont des fonctions données sur $J^1(V_p, W_n)$ et par conséquent correspond une forme $\omega = X_i^\sigma \, dp_\sigma^i + X_\sigma \, d\xi^\sigma$ sur $J^1(V_p, W_n)$.

Théorème 4. — *Si la forme de Pfaff ω est la somme de deux formes de Pfaff ω_1 et ω_2, les solutions f_1^σ et f_2^σ du système $i(\vec{X})\Omega_{p+1} = 0$ dans le sens du théorème 1 étant supposées exister pour ω_1 et ω_2, la solution relative à ω est $f_1 + f_2$.*

Cette proposition est évidente, elle correspond à la linéarité du système d'équations aux dérivées partielles $S_{2,n}(\xi^\sigma)$. En particulier si les X_σ sont des fonctions définies sur V_p seulement, la solution s'obtient comme somme de la solution relative à la forme $\omega_1 = X_i^\sigma \, dp_\sigma^i$ et d'une solution particulière du système (H).

6° *Formes Ω_{p+r+1}.* — Il peut se faire que la forme de Pfaff ω définie sur $J^1(V_p, W_n)$ dépende de certaines fonctions numériques $\Phi^1, \dots \Phi^r$ définies sur $J^1(V_p, W_n)$ ou de certains opérateurs portant sur ces fonctions. On envisagera alors la forme $\Omega_{p+r+1} = d\Phi^1 \wedge \dots d\Phi^r \wedge \Omega_{p+1}$ définie sur $D^r \times J^1(V_p, W_n)$, D^r étant le produit de r droites numériques où les fonctions Φ^j prennent leur valeur. Les raisonnements faits dans la démonstration du théorème 1 subsistent en remplaçant l'opérateur $i(X)$ par l'opérateur $i(\Phi^1) \wedge i(\Phi^2), \dots, i(\Phi^r) \wedge i(\vec{X})$. Pour déterminer l'ensemble des fonctions ξ^σ et les fonctions Φ^j on adjoint au système associé les équations de définition des fonctions Φ^j. Un exemple de ce cas est constitué par le mouvement d'un fluide parfait, quand on tient compte de la densité, de la pression, de l'échauffement.

§ 3. — Propriétés du noyau de $J^1(V_p, W_n)$.

Dans ce paragraphe où il est surtout question du noyau de $J^1(V_p, W_n)$, nous notons ce dernier $NJ^1(V_p, W_n)$. Il existe certaines propriétés évidentes du noyau de $J^1(V_p, W_n)$ utiles dans les applications. Elles résultent du fait déjà signalé § 1, 3 que $J^1(V_p, W_n)$ peut être considérée comme une variété fibrée ayant pour base $V_p \times W_n$ et de fibres isomorphes à l'espace $L(R^p, \rho^n)$ des applications linéaires et homogènes de R^p dans ρ^n.

Proposition 1. — *Si* $W_n = W_\alpha + W_\beta$, $NJ^1(V_p, W_n)$ *est isomorphe au produit de* $NJ^1(V_p, W_\alpha)$ *par* $NJ^1(V_p, W_\beta)$.

Cela résulte que la propriété est vraie pour $L(R^p, \rho^{\alpha+\beta})$.

Remarque. — Cette proposition est vraie pour $NJ^r(V_p, W_\alpha \times W_\beta)$. Il suffit de revenir à la définition des r-jets de source x : $J^r_x(V_p, W_n)$.

Conséquence. — La forme Ω_{p+1} est la somme de deux formes Ω^α_{p+1} sur $J^1(V_p, W)$ et Ω^β_{p+1} sur $J^1(V_p, W_\beta)$

$$\xi \in W_\alpha \quad \Omega^\alpha_{p+1} = (-1)^{i-1} d\xi^\sigma \wedge dp^i_\sigma \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge d\check{x}^i \wedge \ldots dx^p + \omega^\alpha \wedge V_p$$
$$\eta \in W_\beta \quad \Omega^\beta_{p+1} = (-1)^{i-1} d\xi^\sigma \wedge dq^i_\sigma \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge d\check{x}^i \wedge \ldots dx^p + \omega^\beta \wedge V_p.$$

Remarque. — Si ω^α et ω^β sont des formes basiques sur $J^1(V_p, W_\alpha)$ et $J^1(V_p, W_\beta)$ le système des équations Hamiltoniennes généralisées se décompose en deux systèmes distincts.

Proposition 2. — *Si* $V_p = V_h \times V_k$, $NJ^1(V_p, W_n)$ *est isomorphe au produit de* $NJ^1(V_h, W_n)$ *par* $NJ^1(V_k, W_n)$.

Même raison que pour 1.

Remarque. — Cette proposition est inexacte pour $NJ^r(V_h \times V_k, W_n)$ si $r > 1$. En effet si on envisage la source (x, y) dans le noyau de $J^r(V_h \times V_k, W_n)$ on a des éléments composés tels que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^i . \partial y^j}$ avec $i + j = r$.

Conséquence. — La forme Ω_{h+k+1} peut s'écrire :

$$\Omega_{h+k+1} = \Phi_{h+1} \wedge V_k + (-1)^h V_h \wedge \Phi_{k+1} + \omega \wedge V_h \wedge V_k$$

expression dans laquelle V_h et V_k désignent les deux formes volumes sur les variétés respectives (V_h) et (V_k), ω une forme de Pfaff sur $J^1(V_h \times V_k, W_n)$, Φ_{h+1} une forme de degré $h+1$ sur $J^1(V_h, W_n)$, Φ_{k+1} une forme de degré $k+1$ sur $J^1(V_k, W_n)$.

En effet un vecteur $\vec{p}_\sigma$ dans $NJ^1(V_h \times V_k, W_n)$ est la somme de deux vecteurs $\vec{u}_\sigma$ dans $NJ^1(V_h, W_n)$, $\vec{v}_\sigma$ dans $NJ^1(V_k, W_n)$. $\vec{p}_\sigma = \vec{u}_\sigma + \vec{v}_\sigma$

$$\begin{aligned}\theta(\vec{p}_\sigma)\, V_h \wedge V_k &= [\theta(\vec{p}_\sigma)\, V_h] \wedge V_k + (-1)^h V_h \wedge [\theta(\vec{p}_\sigma)\, V_k] \\ &= [\theta(\vec{u}_\sigma)\, V_h] \wedge V_k + (-1)^h V_h \wedge [\theta(\vec{v}_\sigma)\, V_k]\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\Omega_{h+k+1} = \Big[\sum_{\sigma=1}^{n} d\xi^\sigma \wedge \theta(\vec{u}_\sigma)\, V_h\Big] \wedge V_k \\ + (-1)^h V_h \wedge \Big[\sum_{\sigma=1}^{n} d\xi^\sigma \wedge \theta(\vec{v}_\sigma)\, V_k\Big] + \omega \wedge V_h \wedge V_k,\end{aligned}$$

$$\Omega_{h+k+1} = \Phi_{h+1} \wedge V_k + (-1)^h V_h \wedge \Phi_{k+1} + \omega \wedge V_h \wedge V_k. \tag{18}$$

PROPOSITION 3. — *Soient* V_p, V_q, W_n, *trois variétés, toute application f de* (V_q) *dans* (W_n) *se prolonge en une application de* $J^1(V_p, V_q)$ *dans* $J^1(V_p, W_n)$.

Nous avons vu que $J^1(V_p, W_n)$ peut être considérée comme un espace fibré ayant pour base (V_p) pour fibre $T_p(W_n)$. Comme l'application de (V_q) dans W_n se prolonge aux espaces tangents $T(V_q)$ dans $T(W_n)$ la proposition est évidente. Dans un domaine de coordonnées au point η de (V_q), l'application f fait correspondre le point ξ de (W_n) au moyen des formules $\xi^\sigma = f^\sigma(\eta^\rho)$. Cette application se prolonge en une application de l'espace des vecteurs tangents à (V_q) noté $T(V_q)$ dans l'espace $T(W_n)$ des vecteurs tangents à (W_n) au moyen des formules

$$\xi^\sigma = f^\sigma(\eta^1, \ldots, \eta^\sigma, \ldots, \eta^q) \qquad u^\sigma = \frac{\partial f^\sigma}{\partial \eta^\rho} v^\rho.$$

Les formules

$$x^i = x^i \qquad \xi^\sigma = f^\sigma(\eta^1, \ldots, \eta^\rho, \ldots, \eta^n) \qquad u_i^\sigma = \frac{\partial f^\sigma}{\partial \eta^\rho} v_i^\rho$$

traduisent une application de $J^1(V_p, V_q)$ dans $J^1(V_p, W_n)$ que nous appelons prolongement de f aux variétés des jets.

Remarque. — Si on utilise les coordonnées pratiques dans le noyau des jets, il faut considérer l'application inverse f^{-1} et remplacer les dernières formules par

$$p^i_\sigma = \frac{\partial \eta^\rho}{\partial \xi^\sigma} \pi^i_\rho.$$

Corollaire. — *La forme Ω_{p+1} définie sur $J^1(V_p, W_n)$ remonte alors sur la variété $J^1(V_p, W_q)$. Explicitons les calculs de ce transport :*

$$d\xi^\sigma = \alpha^\sigma_\rho d\eta^\rho \qquad p^i_\sigma = \underline{\alpha}^\rho_\sigma \pi^i_\rho$$
$$\Phi_{p+1} = \Sigma(-1)^{i+1} d\xi^\sigma \wedge dp^i_\sigma \wedge dx^1 \wedge \ldots d\check{x}^i \wedge \ldots \wedge dx^p$$

devient :

$$\overline{\Phi}_{p+1} = \Sigma(-1)^{i+1} d\eta^\rho \wedge d\pi^i_\rho \wedge dx^1 \wedge \ldots d\check{x}^i \wedge \ldots \wedge dx^p$$
$$\omega = X^\sigma_i dp^i_\sigma + X_\sigma d\xi^\sigma \qquad \textit{devient} \qquad \overline{\omega} = Y^\rho_i d\pi^i_\rho + Y_\rho d\eta^\rho$$

d'où la forme

$$\overline{\Omega}_{p+1} \qquad \textit{sur} \qquad J^1(V_p, V_q).$$
$$\overline{\Omega}_{p+1} = (-1)^{i+1} d\eta^\rho \wedge d\pi^i_\rho \wedge dx^1 \wedge \ldots d\check{x}^i \wedge \ldots dx^p + \overline{\omega} \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^p.$$

Application. — Soit $J^1(V_h \times V_k, W_n)$ la variété des jets associée aux applications de $V_h \times V_k$ dans (W_n), φ une application de $V_h \times V$ dans W_n. Par l'application la forme Ω_{h+k+1} sur $J^1(V_h \times V_k, W_n)$ devient une forme sur $J^1(V_h \times V_k, V_h \times V)$. Si les applications de $V_h \times V_k$ dans $V_h \times V$ se réduisent aux applicationsde (V_k) dans (V) la forme Ω_{h+k+1} est une forme sur $V_h \times J^1$ (V_k, V). La formule (18) dans laquelle Φ_{h+1} est nulle donne :

$$\overline{\Omega}_{h+k+1} = V_h \wedge [(-1)^h \Phi_{k+1} + (-1)^h \omega \wedge V_k].$$

Par sommation sur une chaîne de (V_h) cette forme devient une forme Ω_{k+1} de degré $k+1$ sur $J^1(V_k, V)$.

$$\Omega_{k+1} = (-1)^{hk} \int_{C(V_h)} (\Phi_{k+1} + \omega \wedge V_k) \wedge V_k.$$

Nous verrons l'application de ce résultat à la génération des équations de la mécanique des systèmes rigides à partir des équations de la mécanique des milieux continus.

CHAPITRE II

LA MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS GALILÉENS

§ 1. — La forme génératrice des milieux continus galiléens.

Nous allons montrer que 3 des postulats classiques de la mécanique Galiléenne conduisent à l'existence d'une forme génératrice des équations du mouvement au sens du théorème fondamental du chapitre I.

Postulat 1. — Il existe un temps universel, indépendant des milieux considérés, défini à une constante additive près :

$$t = \tau + t_0.$$

Conséquence. — Les mouvements d'un milieu continu à n dimensions seront définis par des applications de l'espace numérique $R_n \times t$ dans un espace numérique à n dimensions ρ^n.

Postulat 2. — L'espace R^n à n dimensions est proprement Euclidien.

Conséquence. — Il existe sur R^n un tenseur covariant du second ordre fondamental g_{ij}, permettant de définir la norme d'un vecteur de R^n au moyen d'une forme quadratique définie positive de ses composantes contravariantes. L'espace image de R^n par une application est également proprement Euclidien. Nous désignerons son tenseur fondamental par $\gamma_{\sigma\rho}$. La structure d'espace proprement Euclidien de R^n et de ρ^n s'étend au noyau de l'ensemble des jets d'ordre 1 $J^1(R^n, \rho^n)$. Un élément de ce noyau de l'ensemble des jets, ayant pour coordonnées p^i_σ, étant identifié à un tenseur construit sur l'espace tangent T_x

au point x de R^n et sur le dual T^*_ξ de l'espace tangent au point ξ de ρ^n, le tenseur métrique sur le noyau de $J^1(R^n, \rho^n)$ est $\gamma^{\sigma\rho} g_{ij}$ pour le système des coordonnées utilisées dans le noyau.

REMARQUE. — Lorsqu'il s'agira du noyau de $J^1(R^n \times t, \rho^n)$ on considèrera sur la droite numérique t un tenseur métrique $g_{n+1,n+1}$ et on prendra pour tenseur métrique sur le noyau des jets le tenseur ayant pour composante $\gamma^{\sigma\rho} g_{ij}$, $\gamma^{\sigma\rho} g_{n+1,n+1}$.

Ainsi le vecteur p^{n+1} de composantes $(0, 0, \ldots, 0, p_1^{n+1}, p_2^{n+1}, \ldots p_n^{n+1})$ a pour norme $\gamma^{\sigma\rho} g_{n+1,n+1} p_\sigma^{n+1} p_\rho^{n+1}$.

POSTULAT 3. — Dans les milieux à n dimensions, tous les repères formées par les systèmes de n vecteurs orthogonaux, animés d'un mouvement de translation uniforme sont équivalents.

Conséquence. — Si par rapport à un premier repère, un point M de R^n, source de l'application a pour coordonnées $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ le point μ but de l'application dans ρ^n a pour coordonnées $(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$ et si par rapport à un deuxième repère M et μ ont respectivement pour coordonnées $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ et $(\eta^1, \eta^2, \ldots, \eta^n)$ les formules

$$(19)\qquad \begin{cases} \xi^\sigma = a^\sigma_\rho n^\rho + v^\sigma \tau, \\ t = \tau + t_0, \\ x^i = a^i_j y^j \end{cases}$$

définissant le passage du deuxième repère au premier dans lesquelles la matrice $\|a^\sigma_\rho\| = \|a^i_j\|$ est une matrice orthogonale, constituent une représentation d'un groupe G, appelé groupe Galiléen, caractéristique de la mécanique Galiléenne.

D'après le théorème fondamental du chapitre I, à l'ensemble des applications de $R^n \times t$ dans ρ^n est associée une forme génératrice de degré $n + 2$ sur $J^1(R^n \times t, \rho^n)$ qui dans le premier repère a pour expression en coordonnées pratiques :

$$\Omega_{n+2} = \Sigma (-1)^{i+1} d\xi^\sigma \wedge dp^i_\sigma \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge d\check{x}^i \wedge \ldots dx^n \wedge dt \\ + \omega \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \wedge dt.$$

Le postulat 3 indiquant que dans un milieu à n dimensions il n'existe aucun repère privilégié, implique que la forme Ω_{n+2} doit être invariante par G. Comme dans Ω_{n+2} le seul élément

qui n'est pas déterminé est ω. les conditions d'invariance de Ω_{n+2} par G vont nous permettre de préciser ω.

Les formules (19) définissent une application de $R^n \times t \times \rho \times G$ dans $R^n \times t \times \rho^n$. L'ensemble des jets $J^1(R^n \times t, \rho^n)$ est contenu dans $J^1(R^n \times t, R^n \times t \times \rho^n)$. La forme Ω_{n+2} définie sur la partie de $J^1(R^n \times t, R^n \times \rho^n)$ dont le but est ρ^n, remonte par l'application $R^n \times t \times \rho^n \times G$ dans $R^n \times t \times \rho^n$ sur $J^1(R^n \times t, R^n \times t \times \rho^n \times G)$. Pour $\gamma \in G$ fixé la restriction de Ω_{n+2} à $J^1(R^n \times t, R^n \times t \times \rho^n \times \{\gamma\})$ est une forme $\Omega_{n+2,\gamma}$. L'invariance se traduit par l'égalité

$$\Omega_{n+2,\gamma} = \Omega_{n+2}.$$

Le groupe G opère sur $R^n \times t$, ρ^n, et par prolongement sur le noyau des jets sur l'ensemble $J^1(R^n \times t, \rho^n)$. Les formules traduisant le prolongement de G sur le noyau sont en coordonnées canoniques

$$\begin{aligned} u_i^\sigma &= a_\rho^\sigma \underline{a}_i^j v_j^\rho \\ u_{n+1}^\sigma &= a_\rho^\sigma v_{n+1}^\rho + v^\sigma \end{aligned}$$

et en coordonnées pratiques :

$$\begin{aligned} p_\sigma^i &= \underline{a}_\sigma^\rho a_j^i \pi_\rho^j \\ p_\sigma^{n+1} &= \underline{a}_\sigma^\rho \pi_\rho^{n+1} + v^\sigma. \end{aligned}$$

Invariants du groupe G. — Il est important de remarquer que le groupe Galiléen G est un sous-groupe d'un groupe G′, en désignant par G′ le groupe linéaire correspondant à une matrice $\|a_j^i\|$ quelconque. Le groupe G′ laisse invariant les n fonctions algébriques suivantes des p_σ^i

$$\begin{aligned}
J'_1 &= \Sigma p_i^i && (\Sigma \text{ comprend } n \text{ termes})\\
J'_2 &= \Sigma p_j^i p_k^j && (\Sigma \text{ comprend } n^2 \text{ termes})\\
J'_3 &= \Sigma p_j^i p_k^j p_i^k && (\Sigma \text{ comprend } n^3 \text{ termes})\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
J'_r &= \Sigma p_{i_2}^{i_1} p_{i_3}^{i_2} p_{i_4}^{i_3}, \ldots, p_{i_1}^{i_r} && (\Sigma \text{ comprend } n^r \text{ termes})\\
J'_n &= \Sigma p_{i_2}^{i_1} p_{i_3}^{i_2} p_{i_4}^{i_3}, \ldots, p_{i_1}^{i_n} && (\Sigma \text{ comprend } n^n \text{ termes})
\end{aligned}$$

Nous désignerons par J′ l'ensemble de ces invariants. Si on prend le groupe Galiléen G, G laisse non seulement invariant l'ensemble J′ mais les normes des vecteurs $\overrightarrow{p^i}(p_1^i, p_2^i, \ldots, p_n^i)$ et plus généralement les normes des r-vecteurs construits sur les vecteurs p^i. Nous désignerons par J l'ensemble des invariants du groupe Galiléen G.

Détermination de la forme de Pfaff ω pour que Ω_{n+2} soit invariante par G. — Partageons la somme des termes constituant ω en trois :

1° $\omega_c = \sum_{\sigma=1}^{n} X^{\sigma}_{n+1}\, dp^{n+1}_{\sigma}$. Nous verrons qu'ils correspondent à la partie cinétique du mouvement d'un point de R^n.

2° $\omega_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} X^{\sigma}_i\, dp^i_{\sigma}$. Nous verrons que si les X^{σ}_i sont des fonctions des p^i_{σ} ils correspondent à la déformation du milieu.

3° $\omega_\sigma = - H_\rho\, d\xi^\sigma$. Ils correspondent au travail élémentaire d'un champ de forces H_σ appliquée en un point μ du milieu, et ne comprenant aucune action superficielle telle qu'on l'entend habtiuellement. Le signe — qui précède H_ρ provient du fait que Ω_{n+2} n'étant définie qu'à une constante multiplicative près, il faut le choisir ainsi pour retrouver les équations de la mécanique classique.

Pour effectuer le calcul de $\Omega_{n+2,g}$ partageons les termes de Ω_{n+2} en deux catégories :

a) ceux de la forme

$$\varphi_c = \sum_{\sigma=1}^{n} (-1)^{n+2} d\xi^\sigma \wedge dp^{n+1}_{\sigma} \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n + \omega_c \wedge dx^1 \wedge \dots dx^n \wedge dt.$$

b) ceux de la forme :

$$\varphi_d = \sum_{\sigma=1}^{n} (-1)^{i+1} d\xi^\sigma \wedge dp^{\sigma}_i \wedge dx^1 \wedge \dots d\check{x}^i \wedge \dots dx^n \wedge dt$$
$$+ \omega_d \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dt.$$

Étudions la manière dont se transforme les termes φ_c

$$\varphi_c = [(-1)^{n+2} d\xi^\sigma \wedge dp^{n+1} + (-1)^n \omega_c \wedge dt] \wedge dx^1 \wedge \dots dx^n,$$
$$\varphi_c = (-1)^n [d\xi^\sigma \wedge dp^{n+1}_{\sigma} + \omega_c \wedge dt] \wedge (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n).$$

Comme dans un changement de variables orthogonales $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$ occupons nous uniquement des termes :

$$\varphi_2 = \sum_{\sigma=1}^{n} d\xi^\sigma \wedge dp^{n+1}_{\sigma} + \omega_c \wedge dt.$$

D'après les formules de changement de repère :

$$d\xi^\sigma = a^{\sigma}_{\rho}\, d\eta^\rho + v^\sigma d\tau, \qquad dp^{n+1}_{\sigma} = \underline{a}^{\rho}_{\sigma}\, d\pi^{n+1}_{\sigma}, \qquad \omega_c = X^{\sigma}_{n+1}\, dp^{n+1}_{\sigma}.$$
$$\varphi_2 = \underline{a}^{\rho}_{\sigma}(a^{\sigma}_{\rho}\, d\eta^\rho + v^\sigma d\tau) \wedge d\pi^{n+1}_{\rho} + X^{\sigma}_{n+1} \underline{a}^{\rho}_{\sigma}\, d\pi^{n+1}_{\rho} \wedge d\tau,$$
$$\varphi_2 = d\eta^\rho \wedge d\pi^{n+1}_{\rho} + (X^{\sigma}_{n+1} - v^\sigma)\, \underline{a}^{\rho}_{\sigma} . d\pi^{n+1}_{\rho} \wedge d\tau.$$

Or dans un changement de repère $X^{\sigma}_{n+1} = a^{\sigma}_{\rho} . Y^{\rho}_{n+1}$; X^{σ}_{n+1} peut donc être identifié aux composantes d'un vecteur contravariant. Il en résulte

$$X^{\sigma}_{n+1} = u^{\sigma}_{n+1} F$$

où F désigne une fonction des invariants de l'ensemble J. Dans le changement de repère

$$X^{\sigma}_{n+1} = F(a^{\sigma}_{\rho} v^{\rho}_{n+1} + v^{\sigma}).$$

Pour que φ_2 soit invariante, F ne peut être qu'une constante égale à l'unité. Il en résulte $\omega_c = u^{\sigma}_{n+1} . dp^{n+1}_{\sigma}$. Comme le groupe G laisse invariant la norme du vecteur $\vec{p}^{\,n+1}$, ω_c ne peut être que proportionnelle à la différentielle de cet invariant qui a pour expression en coordonnées rectangulaires $\sum_{\sigma=1}^{n} (p^{n+1}_{\sigma})^2$. En désignant par δ une constante par rapport à G, mais qui peut très bien être une fonction des coordonnées du point μ et d'autres paramètres (température, pression)

$$\omega_c = \frac{1}{2\delta} d[\Sigma (p^{n+1}_{\sigma})^2].$$

De $\omega_c = u^{\sigma}_{n+1}\, dp^{n+1}_{\sigma}$ résulte $p^{n+1}_{\sigma} = \delta u^{\sigma}_{n+1}$, par suite en coordonnées canoniques

$$\omega_c = \frac{\delta}{2} d(u^{\sigma}_{n+1})^2 = \frac{\delta}{2} d\left(\frac{\partial \xi^{\sigma}}{\partial t}\right)^2.$$

Au point de vue mécanique il est intéressant de remarquer que le nombre δ n'est autre que la densité et que le vecteur $\vec{p}^{\,n+1}(p^{n+1}_{\sigma})$ n'est autre que le vecteur quantité de mouvement du point μ.

De ce qui précède résulte le théorème :

THÉORÈME 1. — *En mécanique galiléenne, la partie cinétique ω_c de la forme de Pfaff ω est la demi-différentielle de la force vive δv^2, δ densité de la matière au point μ.*

REMARQUE. — Quand on utilise des coordonnées pratiques, l'expression générale de φ_2 est en coordonnées orthogonales

$$\varphi_2 = d\xi^{\sigma} \wedge dp^{n+1}_{\sigma} + \frac{1}{2\delta} d\left[\sum_{\sigma=1}^{n} (p^{n+1}_{\sigma})^2\right]$$

si les axes ne sont pas rectangulaires à

$$\varphi_2 = d\xi^\sigma \wedge dp_\sigma^{n+1} + \frac{1}{2\delta} d(\gamma^{\sigma\rho} g_{n+1,n+1} p_\sigma^{n+1} p_\rho^{n+1}).$$

Étudions maintenant la transformation de φ_d :

$$\varphi_d = \Sigma(-1)^{i+1} d\xi^\sigma \wedge dp_\sigma^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge d\check{x}^i \wedge \ldots \wedge dx^n \wedge dt \\ + \omega_d \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \wedge dt.$$

La présence du facteur $dt = d\tau$ dans les produits extérieurs constituant les termes de φ_d, conduit à ne conserver dans l'expression de $d\xi^\sigma$ que $a_\rho^\sigma d\eta^\rho$. Si on désigne par $A_{j'}^i$ le mineur du déterminant de la matrice a_j^i relatif à l'élément a_j^i,

$$dx^1 \wedge \ldots \wedge d\check{x}^i \wedge \ldots \wedge dx^n = (-1)^{i+j'} A_{j'}^i \, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^{j'} \wedge \ldots \wedge dy^n.$$

Si on désigne par $\alpha_i^{j'}$ l'élément de la matrice inverse de $\|a_j^i\|$, $A_{j'}^i = \det|a| \cdot \alpha_i^{j'}$. Comme la matrice a_j^i est une matrice orthogonale $\det a = +1$, et $\alpha_i^{j'} = a_{j'}^i$. Dans le changement de repère $dp_\sigma^i = a_\sigma^\mu a_j^i \, d\pi_\mu^j$, d'où la transformation des termes de φ_d ne comprenant pas ω_d :

$$((-1)^{i+1} a_\rho^\sigma d\eta^\rho (-1)^{i+j'}) \, (a_\sigma^\mu a_j^i \, d\pi_\mu^j) a_{j'}^i \, (dy^1 \wedge \ldots d\check{y}^{j'} \wedge \ldots \wedge dy^n \wedge d\tau.$$

Des propriétés des matrices orthogonales résultent :

$$a_j^i . a_{j'}^i = 0 \quad \text{si} \quad j' \neq j, \qquad a_j^i . a_{j'}^i = 1 \quad \text{si} \quad j' = j.$$

Il en résulte

$$\varphi_d = \Sigma(-1)^{j+1} d\eta^\rho \wedge d\pi_\rho^j \wedge dy^1 \wedge \ldots \wedge d\check{y}^j \wedge \ldots \wedge dy^n \wedge d\tau \\ \omega_d \wedge dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n \wedge d\tau.$$

Envisageons maintenant la partie ω_d de ω. Dans $\omega_d = X_i^\sigma dp_\sigma^i$ les X_i^σ sont des fonctions des p_σ^i. Dans un changement de variables $\omega_d = X_i^\sigma dp_\sigma^i = Y_j^\rho \, d\pi_\rho^j$, l'égalité tensorielle

$$X_i^\sigma = a_\rho^\sigma a_i^j Y_j^\rho$$

montre que les X_i^σ peuvent être identifiées aux composantes d'un tenseur mixte construit sur l'espace tangent à R^n et à son dual. Si M_i^σ désigne un tenseur mixte construit sur R^n et son dual on a pour $\sigma \neq i$ $X_i^\sigma = M_i^\sigma . f$ où f est une fonction des invariants du groupe galiléen, pour G $\sigma = i$ $X_i^i = M_i^i . f + g$ où f et g désignent deux fonctions des invariants du groupe galiléen G. La présence de l'invariant g dans l'expression de X_i^i provient

du fait que dans ω_d on peut avoir des termes de la forme $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} dp_i^i\right)$ dont chaque terme du produit $\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^i\right), \left(\sum_{i=1}^{n} dp_i^i\right)$ est un invariant.

En particulier des expressions possibles des X_i sont :

1° pour $\sigma \neq i$ $X_i^\sigma = \gamma^{\sigma\rho} g_{ii} p_\sigma^i f$, pour $\sigma = i$ $X_i^i = p_i^i f + g$.

2° Si on considère le produit contracté $C_i^\sigma = \sum_{j=1}^{n} p_j^\sigma p_i^j$ et plus généralement les produits contractés à r indices $C_i^\sigma = \sum p_{j_1}^\sigma p_{j_2}^{j_1} p_{j_3}^{j_2}, \ldots, p_i^{j_r}$, une expression très générale possible des X_i^σ consiste en une fonction linéaire des C_i^ρ, dont les coefficients sont des fonctions quelconques du groupe G.

Remarquons enfin que l'application du théorème fondamental du chapitre I donne les équations d'Hamilton généralisées :

$$\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} = X_i^\sigma, \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_\sigma^i}{\partial x^i} - X_\sigma = 0.$$

Pour $i \leqslant n$ les n^2 premières équations par la nature de leur second membre X_i^σ permet d'étudier l'application de R^n dans ρ^n et par suite la déformation du milieu. C'est pourquoi $\omega d = X_i^\sigma X_i^\sigma dp_\sigma^i$ correspond aux déformations.

De là résulte le théorème :

Théorème 2. — *En mécanique Galiléenne la partie ω_d de la forme de Pfaff, ω qui correspond aux déformations du milieu a pour coefficient X_i^σ une fonction linéaire des composantes d'un tenseur mixte M_i^σ construit sur R^n et son dual*

$$X_i^\sigma = M_i^\sigma f + \delta_i^\sigma g$$

δ_i^σ désignant le symbole de Kronecker, fet g des fonctions des invariants du groupe Galiléen.

Nous avons ainsi construit une forme Ω_{n+2} invariante par le groupe Galiléen G, dont le support est la variété des jets $J^1(R^n \times t, \rho^n)$. D'après le théorème fondamental I du chapitre I, le système associé à Ω_{n+2} conduit à des équations aux dérivées partielles du second ordre. Ces équations présentent les caractères voulus par les axiomes de la mécanique Galiléenne. Nous proposons alors d'axiomatiser cette dernière de la manière suivante :

AXIOME. — Les équations de la mécanique Galiléenne des milieux continus à n dimensions sont engendrées par le système des équations extérieures associées à la forme extérieure Ω_{n+1} de degré $n+2$, ayant pour support la variété des jets $J^1(R^n \times t, \rho^n)$,invariante par le groupe Galiléen G, système dont on prend les solutions qui sont des fonctions sur $R^n \times t$ de classe $C^r (r \geqslant 2)$.

REMARQUES. — 1. L'axiome précédent entraîne comme il se doit les postulats classiques I, II, III.

2) Les applications montrent qu'on retrouve ainsi les équations classiques et de plus qu'on peut en former d'autres dans un cadre d'hypothèses très larges concernant les déformations du milieu. Notons que c'est le vecteur d'impulsion-énergie qui s'introduit naturellement dans les équations aux dérivées partielles du second ordre.

3) On observera qu'il n'y a pas lieu d'introduire les notions d'énergie de tenseur de déformations, de tenseur de contraintes pour parvenir à ces résultats.

4) Un moyen général d'engendrer une mécanique de milieux continus à n dimensions (le temps étant une des coordonnées locales dans le milieu) est de considérer sur une vairété V_n admettant un groupe ou un pseudo-groupe de transformations G, une forme Ω_{n+1} ayant pour support l'ensemble des jets de V_n dans V_n et invariante par G.

5) Dans un système de coordonnées pratiques quelconques, l'expression de la forme génératrice des mouvements des milieux continus à n dimensions, galiléens est :

$$(20) \quad \Omega_{n+2} = \Big[\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} d\xi^\sigma \wedge dp^i_\sigma \wedge dx^1 \wedge \dots d\check{x}^i \wedge \dots dx^n \wedge dt + \omega \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dt \Big] \sqrt{g}$$

avec

$$\omega = X^\sigma_i \, dp^i_\sigma + d\left(\frac{1}{2\delta} \gamma^{\sigma\rho} g_{n+1,\, n+1} p^{n+1}_\sigma \cdot p^{n+1}_\rho \right) - H_\sigma d\xi^\sigma,$$

$$g = \det gij.$$

Les fonctions X^σ_i seront déterminées dans chaque cas pour les applications que l'on désire traitées.

§ 2. — Mécanique des fils.

On adapte la théorie précédente à la dimension du milieu considéré. Un fil est un milieu dont deux dimensions sont négligeables vis-à-vis de la troisième. Les points du fil sont donc définis au moyen d'une variable s_0, longueur du fil non soumis à une traction.

A. Statique. — L'équilibre des fils est l'étude des applications de la droite numérique s_0, dans l'espace numérique à 3 dimensions ρ^3. D'après la théorie générale nous savons que la forme génératrice des équations de la statique des fils est une forme de degré deux sur la variété des jets $J^1(s_0, \rho^3)$

$$\Omega_2 = \sum_{\sigma=1}^{3} d\xi^\sigma \wedge dp_\sigma + \omega \wedge ds_0.$$

Ω_2 devant être invariante par les transformations du groupe galiléen, la partie ω_d de ω doit être invariante et par suite ne peut être que la différentielle d'une fonction du seul invariant I existant dans ce cas, invariant qui est la norme du vecteur $\vec{p}$ (p_1, p_2, p_3). Soit $f(\mathrm{I})$ cette fonction de I

$$\mathrm{I} = \sum_{\sigma=1}^{3} (p_\sigma)^2,$$

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial \mathrm{I}} 2 \, . \, p_\sigma \, dp_\sigma - \mathrm{H}_\sigma \, d\xi^\sigma$$

(H_σ composantes d'un champ de forces dans ρ^3).

Les équations caractéristiques de Ω s'écrivent :

$$-\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial s_0} + 2 \frac{\partial f}{\partial \mathrm{I}} p_\sigma = 0,$$

$$\frac{\partial p_\sigma}{\partial s_0} - \mathrm{H}_\sigma = 0.$$

Pour déterminer la fonction $f(\mathrm{I})$ il est nécessaire de faire une hypothèse sur la manière dont se comporte le fil.

a) Fil inextensible. — Désignons par s la longueur de l'arc du profil du fil dans sa position d'équilibre sous l'action des forces appliquées. L'hypothèse de la non extensibilité

se traduit par $ds^2 = ds_0^2$, d'où $\sum_{\sigma=1}^{3}\left(\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial s_0}\right)^2 = 1$; des 3 premières équations d'Hamilton résultent alors

$$\left(\frac{\partial f}{\partial I}\right)^2 = \frac{1}{4I}$$

le signe de ω_d devant être le même que celui de ω_h, $f = -\sqrt{I}$.

La forme génératrice des équations de la statique des fils est donc :

$$\Omega_2 = \sum_{\sigma=1}^{3} d\xi^\sigma \wedge dp_\sigma - d\left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}\right) \wedge ds_0 - H_\sigma\, d\xi^\sigma \wedge ds_0.$$

Tension. — Si δ_0 désigne la densité linéaire du fil, on appelle tension T en un point le produit $\delta_0\sqrt{I}$. En remplaçant $\sqrt{I}$ par $\frac{T}{\delta_0}$ on obtient :

$$(21) \quad \Omega_2 = \sum_{\sigma=1}^{3} d\xi^\sigma \wedge dp_\sigma - \left(\frac{\delta_0}{T}\sum_{\sigma=1}^{3} p_\sigma\, dp_\sigma + H_\sigma\, d\xi^\sigma\right) \wedge ds_0$$

dont les équations caractéristiques

$$\frac{d\xi^\sigma}{ds_0} + p_\sigma \frac{\delta_0}{T} = 0, \qquad \frac{dp_\sigma}{ds_0} - H_\sigma = 0$$

conduisent à la forme classique en posant $\frac{d\xi^\sigma}{ds_0} = u^\sigma$

$$\frac{d(Tu^\sigma)}{ds_0} + \delta_0 H_\sigma = 0.$$

b) *Fil extensible.* — Si on admet une loi d'allongement proportionnelle à la tension

$$ds = ds_0\,(1 + kT)$$

des équations d'Hamilton résultent alors

$$\left(\frac{ds}{ds_0}\right)^2 = (1 + kT)^2 = 4I\left(\frac{\partial f}{\partial I}\right)^2.$$

Comme par définition $T = \delta_0\sqrt{I}$

$$\frac{\partial f}{\partial I} = \frac{1}{2\sqrt{I}}\left(1 + k\delta_0\sqrt{I}\right)$$

d'où

$$f = \sqrt{\mathrm{I}} + \frac{k\hat{c}_0}{2}\,\mathrm{I}.$$

La forme génératrice Ω_2 revêt donc la forme initiale

$$\Omega_2 = \sum_{\sigma=1}^{3} d\xi^\sigma \wedge dp_\sigma - df \wedge ds_0 - \mathrm{H}_\sigma\, d\xi^\sigma \wedge ds_0.$$

Comme

$$df = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{I}}}(1 + k\mathrm{T})\, d\mathrm{I}, \quad df \wedge ds_0 = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{I}}}\, d\mathrm{I} \wedge (1 + k\mathrm{T})\, ds_0.$$

En tenant compte de $ds = (1 + k\mathrm{T})\, ds_0$

$$df \wedge ds_0 = \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{I}}}\, d\mathrm{I} \wedge ds = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{I}}} \sum_{\sigma=1}^{3} p_\sigma\, dp_\sigma \wedge ds$$

d'où la nouvelle expression de Ω_2 en fonction de la différentielle ds de l'arc du profil de la courbe d'équilibre.

$$\Omega_2 = \sum_{\sigma=1}^{3} d\xi^\sigma \wedge dp_\sigma - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{I}}} \Sigma p_\sigma\, dp_\sigma \wedge ds - \mathrm{H}_\sigma \frac{1}{1 + k\mathrm{T}}\, d\xi^\sigma \wedge ds$$

qui engendre les équations classiques.

B. Dynamique. — La dynamique Galiléenne des fils est l'étude des applications de $\mathrm{R}^2 = s_0 \times t$ (s_0 droite numérique où le paramètre fixant la longueur du fil au repos prend sa valeur, t droite numérique temporelle) dans ρ^3. D'après l'étude théorique, la forme génératrice des équations du mouvement est une forme de degré 3 sur $\mathrm{J}(s_0 \times t,\ \rho^3)$

$$\begin{aligned}(22)\quad \Omega_3 = \sum_{\sigma=1}^{3} d\xi^\sigma \wedge dp^1_\sigma \wedge dt - \sum_{\sigma=1}^{3} d\xi^\sigma \wedge dp^2_\sigma \wedge ds_0 \\ - d\sqrt{(p^1_1)^2 + (p^1_2)^2 + (p^1_3)^2}\, ds_0 \wedge dt \\ + d\,\frac{(p^2_1)^2 + (p^2_2)^2 + (p^2_3)^2}{2}\, ds_0 \wedge dt - \mathrm{H}_\sigma\, d\xi^\sigma \wedge ds_0 \wedge dt.\end{aligned}$$

Exemple. Vibrations transversales des cordes tendues. — La corde est supposée tendue suivant Ox, la tension imposée suivant cette direction est T_0. On admet qu'il n'y a pas de déplacement longitudinal $\xi^1 = x$, la vibration a lieu suivant l'axe des y, il n'y a qu'une seule fonction inconnue ξ^2 engendrée

par les équations associées à la forme :

$$\Omega_3 = d\xi^2 \wedge dp_2^1 \wedge dt - d\xi^2 \wedge dp_2^2 \wedge dx$$
$$- d\sqrt{\left(\frac{T_0}{\delta_0}\right)^2 + (p_2^1)^2} \wedge dx \wedge dt + p_2^2\, dp_2^2 \wedge dx \wedge dt$$
$$- H_2\, d\xi^2 \wedge dx \wedge dt.$$

Les équations associées donnent :

$$\frac{\partial\xi^2}{\partial x} + \frac{p_2^1}{\sqrt{\left(\frac{T_0}{\delta_0}\right)^2 + (p_2^1)^2}} = 0, \qquad -\frac{\partial\xi^2}{\partial t} + p_2^2 = 0,$$
$$\frac{\partial p_2^1}{\partial x} + \frac{\partial p_2^2}{\partial t} - H_2 = 0.$$

Si on suppose $\frac{T_0}{\delta_0}$ très grand devant p_2^1, on peut écrire $p_2^1 = -\frac{T_0}{\delta_0} \cdot \frac{\partial\xi^2}{\partial x}$ ce qui donne l'équation classique du second ordre

$$\frac{T_0}{\delta_0} \cdot \frac{\partial^2\xi^2}{(\partial x)^2} - \frac{\partial^2\xi^2}{(\partial t)^2} = H_2.$$

Remarque. — Nous avons supposé dans l'étude qui précède l'espace ρ^3 rapporté à des axes rectangulaires. En prenant un système de coordonnées quelconques dans ρ^3, $\gamma^{\sigma\rho}$ désignant le tenseur métrique sous forme contravariante, il suffit de prendre pour expression de l'invariant I, $I = \gamma^{\sigma\rho}\, p_\sigma p_\rho$.

Fluide parfait. — Un milieu continu sera dit du type fluide parfait si la partie ω_d de la forme de Pfaff ω est identiquement nulle et si en outre il existe une fonction F du point μ telle que dans ω_h figure la forme $\frac{1}{\delta}\, dF$ (δ densité du milieu au point μ).

La forme génératrice des équations sera de degré 5 sur la variété des jets $J^1(R^3 \times t, \rho^3)$.

$$\Omega_5 = (-1)^5 \sum_{\sigma=1}^{3} d\xi^\sigma \wedge dp_\sigma^4 \wedge V_3 + \frac{1}{2} d[(p_1^4)^2 + (p_2^4)^2 + (p_3^4)^2] \wedge V_4$$
$$+ \left(\frac{1}{\delta}\, \frac{\partial(P - \beta\tau)}{\partial\xi^\sigma} - H_\sigma\right) d\xi^\sigma \wedge V_4$$

dans laquelle P désigne la pression, τ la température, H_σ les

composantes du champ de forces au point μ du milieu, β le coefficient de dilatation à pression constante, $V_3 = dx \wedge dy \wedge dz$, $V_4 = V_3 \wedge dt$.

On déduit alors de Ω_5 :

$$\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial t} = p_\sigma^4 \qquad \delta \frac{\partial p_\sigma^4}{\partial t} + \frac{\partial (P - \beta\tau)}{\partial \xi^\sigma} - \delta H_\sigma = 0$$

d'où les équations classiques :

$$\delta \frac{\partial^2 \xi^\sigma}{\partial t^2} = -\frac{\partial (P - \beta\tau)}{\partial \xi^\sigma} + \delta H_\sigma.$$

Les fonctions P, τ, δ, étant des fonctions inconnues auxiliaires, on doit adjoindre aux équations précédentes trois autres, en particulier l'équation caractéristique du fluide $(P, ,\tau\ \delta) = 0$ et la condition de conservation de la masse. Cette dernière condition se traduit de la manière suivante : soit $\overrightarrow{p^4}$ le vecteur de composantes $(p_1^4,\ p_2^4,\ p_3^4,\ p_4^4 = \delta)$, $\theta(\overrightarrow{p^4})$ désignant l'opérateur des transformations infinitésimales, relativement au champ $\overrightarrow{p^4}$

$$\theta(\overrightarrow{p^4}) V_4 = 0.$$

Ceci suggère de considérer le milieu comme ayant quatre dimensions et les applications de R^4 dans ρ^4. Comme la densité est variable on envisagera la forme

$$\Omega_5 = \sum_{\sigma=1}^{4} (-1)^5 d\xi^\sigma \wedge dp_\sigma^4 \wedge V_3$$
$$+ \frac{1}{2\delta} d[(p_1^4)^2 + (p_2^4)^2 + (p_3^4)^2 + (p_4^4)^2] \wedge V_4$$
$$+ \sum_{\sigma=1}^{3} \left(\frac{\partial (P - \beta\tau)}{\partial \xi^\sigma} - H_\sigma \right) d\xi^\sigma \wedge V_4 + \sum_{\sigma=1}^{3} \frac{\partial p_\sigma^4}{\partial x^\sigma} - d\xi^4 \wedge V_4.$$

Les équations d'Hamilton généralisées qu'on en déduit sont :

$$\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial t} = \frac{p_\sigma^4}{\delta} \frac{\partial p_\sigma^4}{\partial t} + \frac{\partial (P - \beta\tau)}{\partial \xi_4^\sigma} - \delta H_\sigma = 0 \quad \sigma(1, 2, 3)$$
$$\frac{\partial p_4^4}{\partial t} + \sum_{\sigma=1}^{3} \left(\frac{\partial p_\sigma}{\partial x^\sigma} \right) = 0.$$

La dernière traduit la conservation de la masse, la condi-

tion imposée $p_4^4 = \delta$ entraîne $\dfrac{\partial \xi^4}{\partial t} = 1$, d'où $\xi^4 = t +$ cste en accord avec le postulat concernant le temps dans le cas de la mécanique Galiléenne.

Remarque. — La théorie des mouvements permanents est une conséquence immédiate du cas où Ω_5 admet la transformation infinitésimale associée au champ de vecteurs $(0,0 \ldots, 0; t)$ ce qui se traduit par :

$$\theta(t)\Omega_5 = 0.$$

§ 4. — Milieux isotropes à n dimensions : équations de Navier-Stokes.

La partie ω_d de la forme de Pfaff ω peut être une forme fermée homologue à 0. Dans ce cas il existe pour un milieu isotrope une fonction E des invariants de l'ensemble J du groupe G. On ne sait généralement pas déterminer la fonction E correspondant à certaines propriétés du milieu telles que volume invariable. C'est pourquoi on se borne à en chercher un développement limité. D'après le théorème 2 du chapitre I les termes intéressants sont au moins de degré deux. En se bornant à ces termes du deuxième degré, il n'y en a que deux possibles $(J_1)^2$ et J_2 en désignant par J_1 l'invariant $\sum_{i=1}^{n} p_i^i$ et par J_2 la forme quadratique des p_σ^i sur le noyau $J^1(R^n, \rho^n)$. En désignant par α et β deux coefficients pouvant dépendre de la température on a donc

$$E = +\frac{1}{2}[\alpha(J_1)^2 + \beta J_2)].$$

Ainsi dans le cadre de cette approximation qui est la forme que prend l'approximation linéaire classique dans cette théorie, les milieux isotropes à n dimensions $(n \geqslant 2)$ ne dépendent en dehors de la densité δ que de deux coefficients physiques.

Dans un système de coordonnées quelconques, la forme génératrice s'écrit :

$$(23)\quad \Omega_{n+2} = \Big\{ \Sigma(-1)^{i+1} d\xi^\sigma \wedge dp^i_\sigma \wedge dx^1 \wedge \dots \check{dx^i} \wedge \dots dx^{n+1} + \frac{1}{2\delta} d[(\gamma^{\sigma\rho} g_{n+1,n+1} p^{n+1}_\sigma p^{n+1}_\rho) + dE - X_\sigma d\xi^\sigma] \wedge V_{n+1} \Big\} \sqrt{g}$$

où l'on écrit $x^{n+1} = t$, $g = \det g_{ij}$.

La première série d'équations d'Hamilton généralisées s'écrit :

$$\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} = \frac{\partial E}{\partial p^i_\sigma}, \qquad \frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^{n+1}} = \frac{1}{\delta} \gamma^{\sigma\rho} g_{n+1,n+1} p^{n+1}_\rho.$$

Explicitons les calculs. En coordonnées quelconques

$$E = \frac{\alpha}{2} [\Sigma(p^i_i)]^2 + \frac{\beta}{2} \gamma^{\sigma\rho} g_{ij} p^i_\sigma p^j_\rho.$$

Posons $\dfrac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} = u^\sigma_i$.

Pour $\sigma \neq i$ $\qquad u^\sigma_i = \beta\gamma^{\sigma\rho} g_{ij} p^j_\rho$

Pour $\sigma = i$ $\qquad u^i_i = \beta\gamma^{i\rho} g_{ij} p^j_\rho + \alpha \sum_{i=1}^{n} p^i_i$.

On a d'une manière générale en désignant par δ^σ_i le symbole de Kronecker

$$u^\sigma_i = \beta\gamma^{\sigma\rho} g_{ij} p^j_\rho + \alpha\delta^\sigma_i J_1.$$

En résolvant $p^j_\rho = \dfrac{1}{\beta} \gamma_{\sigma\rho} g^{ij} (u^\sigma_i - \delta^\sigma_j \alpha J_1)$ on détermine $J_1 = \sum_{j=1}^{n} p^j_j$ en faisant dans la formule précédente $\rho = j$

$$\Sigma p^j_j = \frac{1}{\beta} \gamma_{\sigma\rho} g^{ij} (u^\sigma_i - \alpha\delta^\sigma_i J_1).$$

En posant $\pi^i_\sigma = \gamma_{\sigma j} g^{ij}$

$$\sum_{j=1}^{n} p^j_j = \frac{1}{\beta} \pi^i_\sigma (u^\sigma_i - \alpha\delta^\sigma_i J_1) = \frac{1}{\beta} \pi^i_\sigma u^\sigma_i - \frac{\alpha}{\beta} J_1 \times \Sigma\pi^i_i$$

donc

$$J_1 \left(\beta + \alpha \sum_{i=1}^{n} \pi^i_i \right) = \Sigma \pi^i_\sigma u^\sigma_i.$$

Si on pose $I_1 = \sum_{i,\sigma} \pi^i_\sigma u^\sigma_i$

$$J_1 = \frac{I_1}{\beta + \alpha\Sigma\pi^i_i}.$$

Si on prend même système de coordonnées dans R^n et $\rho^n \Sigma \pi_i^i = n$, $J_1 = \frac{1}{\beta + n\alpha} I_1$

$$p_\rho^j = \frac{1}{\beta} g_{\sigma\rho} g^{ij} \left(u_i^\sigma - \alpha \delta_i^\sigma \frac{I_1}{\beta + n\alpha} \right).$$

Les équations d'Hamilton généralisées

$$\frac{\partial p_\rho^{n+1}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p_\rho^j}{\partial x^j} - X_\rho = 0$$

deviennent en utilisant la dérivation absolue :

$$(24) \quad g_{\sigma\rho} g^{n+1,\,n+1} \frac{D(\delta u^\sigma_{n+1})}{Dt} + \frac{1}{\beta} g_{\sigma\rho} g^{ij} \frac{D u_i^\sigma}{D x^j} - \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{\beta + n\alpha} \frac{D I_1}{D x^\rho} - X_\rho = 0.$$

En particulier en axes rectangulaires $g_{\sigma\rho} = 0$ si $\sigma \neq \rho$, $g_{\rho\rho} g^{jj} = 1$

$$(25) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\delta\, \partial \xi^\rho}{\partial t} \right) + \frac{1}{\beta} \Delta \xi^\rho - \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{\beta + n\alpha} \frac{\partial I_1}{\partial x^\rho} - X_\rho = 0.$$

Ce sont les équations de Navier-Stokes dans lesquelles Δ désigne le Laplacien pour un milieu à n dimensions. En introduisant les coefficients de Lamé λ, μ

$$(26) \qquad \alpha = \frac{1}{\mu} \frac{1}{n + \frac{u}{\lambda + \mu}}, \qquad \beta = -\frac{1}{\mu},$$

on les met sous la forme vectorielle classique :

$$\mu \Delta \vec{\xi} + (\lambda + \mu) \overrightarrow{\text{grad}} \left(\text{div } \vec{\xi} \right) + \vec{F} = \frac{\partial}{\partial t} (\delta \vec{v}).$$

Remarque. — L'expression de E en coordonnées canoniques est :

$$E = \frac{1}{2\beta} \gamma_{\sigma\rho} g^{ij} u_i^\sigma u_j^\rho - \frac{\alpha}{\beta + n\alpha} \frac{1}{2\beta} (\gamma_{\sigma i} g^{ij} u_i^\sigma)^2,$$

ce qui donne en utilisant les coefficients de Lamé et des axes rectangulaires

$$E = -\frac{\mu}{2} \sum_{i,\sigma} (u_i^\sigma)^2 - \frac{1}{2} (\lambda + \mu) (\Sigma u_i^i)^2.$$

§ 5. — Forme génératrice des équations de la mécanique des systèmes rigides.

Les mouvements des systèmes rigides d'un milieu à n dimensions sont des applications de $R^n \times t$ dans ρ^n conservant les longueurs et le sens des figures. On a donc localement

$$d\sigma^2 = \sum_{\sigma=1}^{n} (d\xi^\sigma)^2 = ds^2 = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2.$$

Il en résulte en posant $\dfrac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} = u_i^\sigma$ le système d'équations

$$\sum_{\sigma=1}^{n} (u_i^\sigma)^2 = 1, \qquad \sum_{\sigma=1}^{n} u_i^\sigma u_i^\sigma = 0.$$

Pour résoudre ces équations interprétons les géométriquement. En un point μ de coordonnées (ξ^σ) considérons le repère naturel $(\mu, \vec{e_i})$ formé du point μ et des n vecteurs $\vec{e_i}$ de coordonnées (u_i^σ), σ variant de 1 à n. Ce repère est orthonormé, le tenseur métrique correspondant est $\gamma_{\sigma\rho} = 0$ si $\sigma \neq \rho$, $\gamma_{\sigma\sigma} = 1$ si $\rho = \sigma$. Il en résulte que les symboles de Christoffel sont nuls; les n vecteurs $\vec{e_i}$ ont donc des directions fixes, les u_i sont des constantes,

$$u_i^\sigma = m_i^\sigma.$$

Les n^2 éléments m_i^σ sont les éléments d'une matrice orthogonale.

Pour caractériser la partie $\omega_d = X_i^\sigma \, dp_\sigma^i$ de la forme de Pfaff ω sur le noyau $J^1(R^n \times t, \rho^n)$ correspondant à un mouvement du milieu continu au cours duquel les distances restent invariables, remarquons que des équations d'Hamilton généralisées résultent $\dfrac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i} = u_i^\sigma = X_i^\sigma$; d'où $\omega d = m_i^\sigma dp_\sigma^i$. Ce qui donne le théorème.

Théorème 3. — *Si le mouvement d'un milieu continu est tel que les distances mutuelles de ces points restent invariables la partie ω_d de la forme de Pfaff se réduit à une forme à coefficients constants m_i^σ dont l'ensemble sont les éléments d'une matrice orthogonale.*

Remarque. — En vertu du théorème 2 du chapitre I on peut encore dire que $\omega_d = 0$ modulo une forme de Pfaff à coefficients constants.

Si V_D désigne la variété de groupe des déplacements de l'espace à n dimensions la famille des applications considérées est donc constituée par des applications de $R^n \times V_D$ dans ρ^n définies par les formules

$$\xi^\sigma = m_i^\sigma x^i + \eta^\sigma$$

dans lesquelles $||m_i^\sigma||$ désigne une matrice orthogonale.

Dans l'application de $R^n \times V_D$ dans ρ^n la forme générale Ω_{n+2} définie sur $J^1(R^n \times t, \rho^n)$ remonte sur $J^1(R^n \times t, R^n \times V_D)$. Comme les applications de R^n dans R^n se réduisent à l'identité, la forme Ω_{n+2} devient une forme sur $R^n \times J^1(t, V_D)$. Cette forme sommée sur un domaine de R^n engendre une forme Ω_2 de degré deux dont le support est $J^1(t, V_D)$. Or en désignant par $T(V_D)$ l'espace tangent à V_D, $J^1(t, V_D)$ est homéomorphe à $t \times T(V_D)$; on peut donc énoncer le résultat précédent ainsi :

Théorème 4. — *Pour un système rigide la forme génératrice des équations du mouvement est une forme de degré deux dont le support est le produit de la droite numérique t par l'espace tangent à la variété de groupe de déplacement* $V_D = R^n \times (SO_n)$, SO_n *désignant le groupe des rotations dans* R^n.

Corollaire. — *Dans l'espace à 3 dimensions pour un système de solides, la forme génératrice des équations du mouvement sera une forme de degré deux sur le produit de la droite numérique t par des espaces tangents à des variétés de groupes de déplacement.*

Remarque. — Le cas du point matériel est un cas particulier du précédent : Si le système rigide est animé d'un mouvement de translation V_D se réduit à R^3. Le mouvement du système se réduit à celui d'un point matériel dont les équations du mouvement sont engendrées par une forme de degré deux sur la variété de dimension 7 : $t \times T(R^3)$.

Conséquence. — Il est très important de remarquer que les équations de la mécanique du point matériel, et les équations de la mécanique des systèmes rigides se déduisent naturellement

des équations de la mécanique des milieux continus, tandis que la déduction inverse nécessite de faire appel à un postulat concernant des forces dites « intérieures » qui sont complètement inconnues.

§ 6. — Rôle des tenseurs symétriques.

On peut être assez surpris que pour traiter la théorie des mouvements des milieux continus, nous n'ayons eu nullement besoin d'introduire la notion de contraintes. Examinons les conséquences de l'introduction d'un tenseur symétrique T^{ij} deux fois contravariants pour rendre compte des mouvements d'un milieu continu à n dimensions. Soit $\vec{\alpha}$ un champ de vecteurs covariants sur R^n de composantes α_i. Le produit contracté $T^{ij}\alpha_j = f^i$ est un vecteur contravariant $\vec{f}$. D étant un domaine quelconque de R^n, le flux de $\vec{f}$ à travers la frontière de D notée ∂D est :

$$\int_{\partial D} i(\vec{f})V_n$$

en désignant par V_n la forme volume sur R^n.

Pour tout champ $\vec{\alpha}$ laissant invariant le ds^2 du milieu, c'est-à-dire vérifiant les équations de Killing, on écrit que la somme des puissances des forces en action dans le volume fermée D et sur sa frontière est nulle. Si $\vec{X}$ désigne le champ de forces existant en tout point du milieu on a donc :

$$\int_{\partial D} i(\vec{f})V_n + \int_D (\vec{X} . \vec{\alpha})V_n = 0$$

condition qui s'écrit encore :

$$\int_D \theta(\vec{f})V_n + \int_D (\vec{X} . \vec{\alpha})V_n = 0$$

ce qui donne en utilisant des coordonnées cartésiennes :

$$\int_D \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T^{ij}\alpha_j}{\partial x^i} + X^j\alpha_j \right) V_n = 0.$$

L'intégrale précédente étant nulle en particulier pour des champs $\vec{\alpha}$ uniformes

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} + X^j = 0.$$

Un rapprochement s'impose entre cette équation et l'équation homologue du système Hamiltonnien généralisé

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p^i_\sigma}{\partial x^i} - X_\sigma = 0.$$

Comme cette dernière n'a pas le même caractère tensoriel, utilisons le tenseur métrique deux fois contravariant $\gamma^{\sigma\rho}$ pour mettre sous forme contravariante p^i_σ et X_σ.

$$p^{i\rho} = \gamma^{\sigma\rho} p^i_\sigma \qquad X^\rho = \gamma^{\sigma\rho} X_\sigma.$$

En utilisant des axes rectangulaires on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p^{i\rho}}{\partial x^i} - X^\rho = 0.$$

En égalant l'indice j à ρ on en déduit que les composantes T^{ij} du tenseur symétrique sont solutions du système d'équations aux dérivées partielles :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T^{ij}}{\partial x_i} = - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p^{ij}}{\partial x_i} \tag{27}$$

où les p^{ij} figurant au second membre sont des fonctions des x^h, $\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i}$ déduites des équations d'Hamilton généralisé

$$\frac{\partial \xi^\sigma}{\partial x_i} = X^\sigma_i(\ldots, x^h, \ldots, p^i_\rho, \ldots), \quad p^{ij} = \gamma^{j\rho} p^i_\rho.$$

Le système (27) étant linéaire on obtient la solution générale en ajoutant à la solution particulière du système avec second membre, la solution du système sans second membre

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial S^{ij}}{\partial x^i} = 0 \quad j(1 \text{ à } n).$$

On résoud ce dernier système de la manière suivante : donnons-nous n constantes arbitraires β_j, en multipliant l'équation de rang j par β_j et sommant par rapport à j, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \frac{\partial S^{ij}}{\partial x^i} = 0.$$

En posant $\|S^{ij}\| \times \|\beta_j\| = \varphi^i$ on a l'équation $\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial \varphi^i} = 0$ qui exprime que la forme $(-1)^{i+1} \varphi^i \, dx^1 \wedge \ldots \wedge d\check{x}^i \wedge \ldots \wedge dx^n$ est

fermée. Comme dans R^n elle est homologue à 0, il existe une forme de degré $n-2$ telle que l'on ait :

$$(-1)^{i+1}\varphi^i dx^1 \wedge \ldots \wedge d\check{x}^i \wedge \ldots \wedge dx^n$$
$$= d[(-1)^{i+j}\psi^{ij} dx^1 \ldots \wedge d\check{x}^i \wedge \ldots d\check{x}^j \wedge \ldots \wedge dx^n]$$

d'où
$$\varphi^i = (-1)^{j+1}\frac{\partial \psi^{ij}}{\partial x^j},$$
$$S^{ii} = \frac{1}{\beta_i}(\varphi^i - \beta_j S^{ij}).$$

La solution du système sans second membre s'exprime donc au moyen de $n(n-1)$ fonctions arbitraires. Les contraintes exprimées au moyen d'un tenseur symétrique du second ordre sont donc complètement inconnues puisqu'on a aucun moyen de déterminer les fonctions s^{ij}. C'est pour cette raison qu'il ne faut pas introduire le tenseur des contraintes dans les équations de la théorie des milieux continus.

Pour parer à l'indétermination du tenseur des contraintes on fait classiquement l'hypothèse de l'état neutre, ce qui revient à convenir que l'on prend pour solution générale la solution nulle et l'on se contente de la solution particulière.

Détermination d'une solution particulière du système (27). — Le tenseur p^i_ρ étant un tenseur mixte quelconque, il en est de même du tenseur contravariant $p^{ij} = \gamma^{j\rho}p^i_\rho$. Comme par hypothèse T^{ij} est symétrique on obtient un tenseur symétrique en considérant le tenseur $(\gamma^{\sigma j}p^i_\sigma + \gamma^{\sigma i}p^j_\sigma)$.

Pour $i \neq j$ posons $T^{ij} = -\gamma^{j\sigma}p^i_\sigma - \gamma^{i\sigma}p^j_\sigma = -p^{ij} - p^{ji}$.

Pour $i = j$ de l'équation $\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p^{ij}}{\partial x^i}$ valable en axes rectangulaires (en axes quelconques il suffit d'introduire les dérivations absolues) on déduit

$$\frac{\partial T^{jj}}{\partial x^j} = -\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial T^{ij}}{\partial x^i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p^{ij}}{\partial x^i}.$$

En tenant compte des valeurs des T^{ij} pour $i \neq j$

$$\frac{\partial T^{jj}}{\partial x^j} = +\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial p^{ij}}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial p^{ji}}{\partial x^i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p^{ij}}{\partial x^i},$$
$$= -\frac{\partial p^{jj}}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\partial p^{ji}}{\partial x^i} = -2\frac{\partial p^{jj}}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial p^{ji}}{\partial x^i}.$$

Par une intégration par rapport à x^j on en déduit :

$$T^{ij} = -2p^{ij} + \int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p^{ji}}{\partial x^i} dx^j + \text{cste}.$$

REMARQUE. — Si on désire exprimer le tenseur des contraintes en fonction des dérivées partielles du premier ordre de l'application de R^n dans ρ^n $u_i^\sigma = \dfrac{\partial \xi^\sigma}{\partial x^i}$ des équations d'Hamilton généralisées on déduit

$$u_i^\sigma = X_i^\sigma(\dots p_\rho^j \dots \xi^\sigma, \dots x^h \dots), \qquad p_\rho^j = \varphi_\rho^j(u_i^\sigma \dots, \xi^\sigma, \dots, x^h \dots).$$

Ce n'est qu'après cette résolution que l'on peut obtenir l'expression des T^{ij} en fonction des u_i^σ, ξ^σ, x^h.

CAS PARTICULIER. — Effectuons les calculs dans le cas de l'approximation de Navier-Stokes.

En axes rectangulaires d'après les formules du § 4 :

pour $j \neq i$

$$p^{ij} = \frac{1}{\beta} g^{ii} u_i^j \qquad \text{d'où} \qquad T^{ij} = \frac{-1}{\beta}(g^{ii} u_i^j + g^{jj} u_j^i),$$

pour $j = i$

$$p_i^i = \frac{1}{\beta} u_i^i - \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{\beta + n\alpha} I_1, \qquad \text{avec} \qquad I_1 = \sum_{i=1}^{n} u_i^i,$$

$$T^{jj} = \frac{-2}{\beta} g^{jj} u_j^j + \frac{2\alpha}{\beta} \frac{1}{\beta + n\alpha} I_1 + \frac{1}{\beta} \int \sum_{i=1}^{n=1} \frac{\partial (g^{jj} u_j^i)}{\partial x^i} dx^i$$
$$+ \frac{1}{\beta} \int \frac{\partial}{dx^j}\left(g^{jj} u_j^j - \frac{\alpha}{\alpha + n\beta} I_1\right) dx^j$$

$$\text{d'où} \quad T^{jj} = \frac{-2}{\beta} g^{jj} u_j^j + \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{\beta + n\alpha} I_1 + \frac{1}{\beta} \int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (g^{jj} u_j^i)}{\partial x^i} dx^j$$

$$\text{or} \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g^{jj} u_j^i}{\partial x^i} = g^{jj} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^i \partial x^j}$$

$$\int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (g^{jj} u_j^i)}{\partial x^i} dx^j = g^{jj} \int \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \xi^i}{\partial x^i \partial x^j} dx^j = g^{jj}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^i} + C\right) = g^{jj}(I_1 + C)$$

en désignant par C une constante.

Finalement $T^{jj} = -\left[\dfrac{2}{\beta} g^{jj} u_j^j + \dfrac{\alpha}{\beta} \dfrac{1}{\beta + n\alpha} I_1 + \dfrac{1}{\beta}(I_1 + C)\right] g^{jj}.$

En introduisant les coefficients de Lamé ces formules s'écrivent :

pour $i \neq j$

$$T^{ij} = + \mu(g^{ii}u_i^j + g^{jj}u_j^i)$$

pour $i = j$

$$T^{jj} = 2\mu g^{jj}u_j^j + g^{jj}[(\lambda + \mu) - \mu]I_1 - \mu C = 2\mu g^{jj}u_j^j + g^{jj}(\lambda I_1 - \mu C).$$

Si on introduit le vecteur déplacement $\vec{v}$ dans R^n $\vec{\xi} = \vec{x} + \vec{v}$ pour $i \neq j$ $u_i^j = v_i^j$, pour $j = i$ $u_j^j = v_j^j + 1$, les formules précédentes donnent

$$T^{ij} = \mu\left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\right),$$

$$T^{jj} = 2\mu\frac{\partial v^j}{\partial x^j} + \lambda\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v^i}{\partial x^i} + 2\mu + 3\lambda - \mu C.$$

Ce sont les formules classiques si on prend la constante $C = \dfrac{2\mu + 3\lambda}{\mu}$.

Rôle du tenseur des déformations. — Achevons l'étude du rôle des tenseurs symétriques par celui du tenseur des déformations. Si dans ρ^n le tenseur métrique est $\gamma_{\sigma\rho}$, $d\sigma^2 = \gamma_{\sigma\rho}\,d\xi^\sigma\,d\xi^\rho$ et si dans R^n le tenseur métrique est g_{ij}, $ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j$, on appelle tenseur de déformation le tenseur e_{ij} tel que $d\sigma^2 - ds^2 = e_{ij}dx^i dx^j$, d'où l'expression du tenseur des déformations en fonction des coordonnées canoniques sur $J^1(R^n, \rho^n)$

$$e_{ij} = \gamma_{\sigma\rho}u_i^\sigma u_j^\rho - g_{ij}.$$

Au moyen des équations d'Hamilton généralisées :

$$\frac{\partial\xi^\sigma}{\partial x^i} = X_i^\sigma\,(\dots\,p_\rho^j,\,\dots,\,\xi^\sigma,\,\dots,\,x^h,\,\dots)$$

on obtient l'expression du tenseur des déformations en fonction des coordonnées pratiques

$$e_{ij} = \gamma_{\sigma\rho}\;X_i^\sigma X_j^\rho - g_{ij}.$$

Donc quand la forme ω_d est connue on a immédiatement le tenseur des déformations en fonction des coordonnées sur $J^1(R^n, \rho^n)$. Mais inversement si on connait le tenseur des

déformations sur R^n c'est-à-dire son expression en fonction des variables x^i, il est important de remarquer que cela ne suffit pas pour reconstituer la partie ω_d de la forme de Pfaff sur l'ensemble des jets $J^1(R^n, \rho^n)$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Cartan, *Colloque de Topologie sur les Espaces Fibrés Bruxelles*, 1950, Masson § C° Paris, 1951, p. 15 à 27.

[2] C. Ehresmann, Les prolongements d'une variété différentiable. I. Calcul des jets. *C. R. Acad. Paris*, 233, 1951, P 598. II. L'espace des jets d'ordre r de V_n dans V_m. *C. R. Acad. Paris*, 233, 1951, P 777.

[3] C. Ehresmann, Les prolongements d'une variété différentiable. *Atti IV Cogresso Unione mat. Italiana*, Taormina Ott., 1951.

[4] C. Ehresmann, Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie (*Colloque intern. Géométrie différentielle C.N.R.S.*, 1953, p. 97-110).

[5] F. Gallissot, Les formes extérieures et la mécanique des milieux conti nus *C.R. Acad. Paris*, 244, 1957, p. 2347.

[6] P. Libermann, Sur le problème d'équivalence de certaines structures infinitésimales. *Thèse Ann. di Matematica*, XXXVI, 1954. Sur les Pseudo-groupes de Lie. *Colloque de Topologie de Strasbourg* (avril 1954).

[7] A. Lichnerowicz, Théorie Globale des Connexions et des groupes d'holonomie. *Consiglio Nazionale delle Ricerche*, Paris, Dunod, 1956.

SOLUTION ÉLÉMENTAIRE D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS DU SECOND ORDRE

Par Georges de RHAM

Les numéros 1, 2 et 3 de cet article reproduisent un exposé fait au Colloque Henri Poincaré, à Paris, en octobre 1954, sous le titre « Solution élémentaire d'équations aux dérivées partielles du second ordre à coefficients constants ». J'y ai ajouté, dans le n° 4, une autre représentation des mêmes solutions.

1. — Énoncé du problème et du résultat.

Le but de cet exposé est de déterminer une solution élémentaire relative à l'opérateur

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

c'est-à-dire une distribution E satisfaisant dans R^n à l'équation $\square E = \delta_O$, où δ_O est la distribution de Dirac représentant une masse $+1$ placée à l'origine des coordonnées O dans R^n. [1]

Pour $p = n$, cette solution élémentaire est, à un facteur près, le potentiel de δ_O. Pour $p = 1$, elle est également connue et intervient comme on sait dans la solution du problème de Cauchy pour l'équation des ondes. Je considère ici le cas

[1] Cette définition d'une solution élémentaire se trouve dans L. Schwartz, *Théorie des distributions I* (Paris, Hermann et Cie, 1950), p. 133.

général où p et $q = n - p$ sont deux entiers positifs quelconques. La méthode suivie, utilisée récemment par P.D. Methée [2] dans le cas où $p = 1$, est basée sur deux principes très élémentaires.

Le premier consiste en l'introduction de la forme quadratique

$$u = x_1^2 + \cdots + x_q^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_n^2.$$

En désignant par f l'application de R^n dans R^1 qui envoie le point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de R^n sur le point d'abscisse $\xi = u$ de R^1, à toute fonction $\psi = \psi(\xi)$ définie dans R^1 correspond dans R^n la fonction $f^*\psi(x) = \psi(u)$, qui est appelée image transposée de ψ [3]. On démontre [4] que, grâce au fait que O est le seul point critique de l'application f, à toute distribution S définie dans R^1 correspond de même une distribution f^*S, qui est définie dans $R^n - O$, mais en général pas dans R^n. Toutefois, si le support de S ne contient pas le point $\xi = 0$, le point O n'adhère pas au support de f^*S dans $R^n - O$, et la distribution f^*S est alors définie dans R^n en convenant qu'elle est nulle dans le voisinage de O.

A la distribution de Dirac δ_ε dans R^1, représentant une masse $+1$ placée au point $\xi = \varepsilon$, correspond ainsi dans R^n une distribution $H_\varepsilon = f^*\delta_\varepsilon$, qui est définie dans R^n tout entier pour $\varepsilon \neq 0$ et dont le support est l'hyperboloïde $u = \varepsilon$. A la dérivée k-ième $\delta_\varepsilon^{(k)}$ de δ_ε correspond de même une distribution $H_\varepsilon^k = f^*\delta_\varepsilon^{(k)}$, ayant pour support le même hyperboloïde. Soit Y (ξ) la fonction d'Heaviside, égale à 1 pour $\xi > 0$ et à 0 pour $\xi < 0$; à la distribution $Y_\varepsilon = Y(\xi - \varepsilon)$ correspond la distribution $f^*Y_\varepsilon = Y(u - \varepsilon)$ égale à la fonction valant 1 dans la région $u > \varepsilon$ de R^n et 0 dans la région $u < \varepsilon$. Les formules connues

$$\frac{dY_\varepsilon}{d\varepsilon} = -\delta_\varepsilon \qquad \text{et} \qquad \frac{d\delta_\varepsilon^{(k)}}{d\varepsilon} = -\delta_\varepsilon^{(k+1)}$$

[2] P.-D. Methée, *sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz* (Thèse), Commentarii Mathematici Helvetici 28 (1954), p. 225-269. Ce travail est désigné dans la suite par (M).

[3] Je m'écarte légèrement des notations de (M), et dans la suite une fonction de u sera toujours considérée comme une fonction ou une distribution dans R^n (ou $R^n - O$) et une fonction de ξ comme une fonction ou une distribution dans R^1.

[4] C'est un cas particulier, vérifié directement plus loin, d'un théorème général qui se trouve dans *G. de Rham, Variétés différentiables* (Paris, Hermann et Cie, 1955), p. 63-64. Cet ouvrage est désigné dans la suite par (R).

entraînent

$$(1) \qquad \frac{d}{d\varepsilon} Y(u-\varepsilon) = -H_\varepsilon, \qquad \frac{d}{d\varepsilon} H_\varepsilon^k = -H_\varepsilon^{k+1}.$$

Pour $\varepsilon = 0$, les distributions H_ε^k ne sont définies que dans $R^n - O$ et ces relations n'ont pour l'instant de sens que dans $R^n - O$ (nous verrons que, considérée comme fonction de ε, la distribution $Y(u - \varepsilon)$ est indéfiniment dérivable pour $\varepsilon \neq 0$ mais pas pour $\varepsilon = 0$).

On peut toutefois étendre la définition de ces distributions H_0^k dans R^n en faisant appel à la notion de partie finie, notion qui est précisément le second principe de la méthode employée ici. Étant donnée une fonction $g(\varepsilon)$ définie pour $\varepsilon > 0$, on vérifie aisément qu'il ne peut exister plus d'une combinaison linéaire $I(\varepsilon)$ de fonctions de la forme $\varepsilon^\lambda \log^\mu \varepsilon$, où μ est un entier ≥ 0 et λ un nombre dont la partie réelle est ≤ 0, la valeur $\lambda = 0$ étant exclue si $\mu = 0$, telle que $g(\varepsilon) - I(\varepsilon)$ tende vers une limite finie pour $\varepsilon \to +0$. Cette combinaison linéaire $I(\varepsilon)$, si elle existe, est appelée la *partie infinie* de $g(\varepsilon)$ pour $\varepsilon \to +0$ et la limite en question est appelée la *partie finie de* $g(\varepsilon)$ *pour* $\varepsilon \to +0$ et désignée par

$$\underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{P}f}\ g(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to +0}\ g(\varepsilon) - I(\varepsilon).$$

S'il n'existe pas de telle combinaison linéaire $I(\varepsilon)$, on dit que $\underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{P}f}\ g(\varepsilon)$ n'a pas de sens.

Si $g(\varepsilon)$ est définie pour $\varepsilon < 0$, on définit de même $\underset{\varepsilon \to -0}{\mathrm{P}f}\ g(\varepsilon)$, partie finie de $g(\varepsilon)$ pour $\varepsilon \to -0$.

Cette notion s'applique à des fonctions de ε dont la valeur est une distribution. Considérons par exemple $Y(u - \varepsilon)u^h$. Pour $\varepsilon \to +0$, cette fonction converge vers la fonction $Y(u)u^h$, mais si la partie réelle de h est $\leqslant -1$, cette fonction n'est pas sommable au voisinage des points du cône $u = 0$, elle ne représente pas une distribution, et pour $\varepsilon \to +0$ la distribution $Y(u - \varepsilon)u^h$ ne converge pas dans R^n. Mais on peut montrer que $\underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{P}f}\ Y(u - \varepsilon)u^h$ existe toujours et représente par suite une distribution bien définie dans R^n. Il en est de même de $\mathrm{P}f\ Y(\varepsilon - u)|u|^h$. Nous verrons aussi que, si

$k < \dfrac{n-2}{2}$, la distribution $\underset{\varepsilon\to-0}{\mathrm{H}^k_\varepsilon}$ tend vers une limite pour $\varepsilon \to 0$, tandis que si $k \geqslant \dfrac{n-2}{2}$, il n'y a pas de limite, mais les parties finies $\underset{\varepsilon\to+0}{\mathrm{Pf}}\ \mathrm{H}^k_\varepsilon$ et $\underset{\varepsilon\to-0}{\mathrm{Pf}}\ \mathrm{H}^k_\varepsilon$ existent toujours.

Pour donner l'expression de la solution élémentaire relative à $\square$, il convient de distinguer trois cas, selon la parité de p, q et $n = p + q$.

1^er^ *cas :* n impair, p impair, q pair > 0;
2^e^ *cas :* n pair, p et q pairs > 0;
3^e^ *cas :* n pair > 2, p et q impairs.

Posons encore, *pour n impair* $\geqslant 3$,

$$\mathrm{T}_1 = \underset{\varepsilon\to+0}{\mathrm{Pf}}\ \mathrm{Y}(u-\varepsilon)u^{\frac{2-n}{2}}, \qquad \mathrm{T}_2 = \underset{\varepsilon\to-0}{\mathrm{Pf}}\ \mathrm{Y}(\varepsilon-u)|u|^{\frac{2-n}{2}},$$

et *pour n pair* $\geqslant 4$,

$$\mathrm{T}_1 = \underset{\varepsilon\to+0}{\mathrm{Pf}}\ \mathrm{Y}(u-\varepsilon)u^{\frac{2-n}{2}} + \underset{\varepsilon\to-0}{\mathrm{Pf}}\ \mathrm{Y}(\varepsilon-u)u^{\frac{2-n}{2}}, \qquad \mathrm{T}_2 = \lim_{\varepsilon=0} \mathrm{H}_\varepsilon^{\frac{n-4}{2}}.$$

Cela étant, *dans le 1^er^ et dans le 2^e^ cas,*

$$\mathrm{E} = (-1)^{\frac{q}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(4-2n)\pi^{\frac{n}{2}}} \mathrm{T}_1$$

est une solution élémentaire, $\square\mathrm{E} = \delta_0$ *et* $\square\mathrm{T}_2 = 0$, tandis que *dans le 3^e^ cas*

$$\mathrm{E} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \frac{1}{4\pi^{\frac{n-2}{2}}} \mathrm{T}_2$$

est une solution élémentaire, $\square\mathrm{E} = \delta_0$, *et* $\square\mathrm{T}_1 = 0$.

On remarquera que, dans le 1^er^ cas, le support de la solution élémentaire E est la région $u \geqslant 0$ de R^n limitée par la surface du cône $u = 0$; dans le 2^e^ cas, le support de E est l'espace R^n tout entier et dans le 3^e^ cas c'est la surface du cône $u = 0$. L'équation des ondes, pour $p = 1$, illustre le 1^er^ cas si n est impair et le 3^e^ cas si n est pair.

Il est inutile de considérer le cas où p est pair et q impair, qui se ramène au 1^er^ cas en changeant $\square$ en $-\square$ et u en

— u. Pour $q = 0$, la méthode s'applique aussi et l'on retrouve la solution élémentaire bien connue (pour $n > 2$)

$$E = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(4-2n)\pi^{\frac{n}{2}}} u^{\frac{2-n}{2}}.$$

Elle s'applique également dans les cas où $n = 2$, cas qui peuvent être laissés au lecteur comme exercice.

Les calculs qui conduisent à ces résultats, indiqués au n° 3, utilisent un développement asymptotique de H_ε, déjà considéré par P.D. Methée dans le cas où $p = 1$, qui sera établi en toute généralité au n° 2.

Pour terminer, on examinera dans quelle mesure les solutions élémentaires ici obtenues sont caractérisées par leur propriété évidente d'être invariantes vis-à-vis de tout homéomorphisme C^∞ de R^n en lui-même laissant u invariante.

2. — Développement asymptotique de H_ε.

En utilisant la terminologie de (R), nous appelons distribution tout courant de degré 0. Un courant de degré n dans R^n est le produit d'une distribution dans R^n par l'élément de volume $dx_1 \ldots dx_n$, et un courant de degré 1 dans R^1 est le produit d'une distribution dans R^1 par $d\xi$.

Si T est un courant de degré n à support compact dans R^n, son image par f est le courant fT de degré 1 dans R^1, défini par la formule

$$fT[\psi] = T[f^*\psi], \tag{2}$$

où $\psi = \psi(\xi)$ désigne toujours une fonction C^∞ à support compact dans R^1.

Désignons par $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction C^∞ à support compact dans R^n, quelconque, et posons

$$\alpha = \varphi(x_1, \ldots x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \tag{3}$$

et

$$f\alpha = F(\xi)\, d\xi. \tag{4}$$

Le fait que O est le seul point critique de l'application f

entraîne que $F(\xi)$ est C^∞ pour $\xi \neq 0$, et même pour $\xi = 0$ lorsque le support de φ ne contient pas le point O. Nous montrerons que les dérivées d'ordre $\leqslant \frac{n-3}{2}$ de $F(\xi)$ sont toujours continues pour $\xi = 0$; cela résultera d'un développement asymptotique de $F(\xi)$ au voisinage de $\xi = 0$, que l'on va établir, dont on pourra déduire par simple dérivation le développement asymptotique de toute dérivée $F^{(k)}(\xi)$.

Pour $T = \alpha$, la formule (2) peut s'écrire $\psi[f\alpha] = f^*\psi[\alpha]$. En supposant que le support de α ne contient pas le point O, $f\alpha$ étant alors C^∞, on est conduit à poser, en remplaçant ψ par une distribution quelconque S dans R^1,

$$(5) \qquad f^*S[\alpha] = S[f\alpha],$$

ce qui définit f^*S dans $R^n - O$. Si le support de S ne contient pas le point $\xi = 0$, cette formule conserve un sens lorsque le support de α contient O et définit la distribution f^*S dans R^n, distribution qui est alors nulle au voisinage du cône $u = 0$.

Pour $S = \delta_\varepsilon$, il vient en particulier

$$H_\varepsilon[\alpha] = f^*\delta_\varepsilon[\alpha] = \delta_\varepsilon[f\alpha] = \delta_\varepsilon[F(\xi)\,d\xi] = F(\varepsilon),$$

d'où, en vertu de (1),

$$H_\varepsilon^k[\alpha] = (-1)^k F^{(k)}(\varepsilon).$$

La détermination du développement asymptotique de H_ε au voisinage de $\varepsilon = 0$ revient donc à celle du développement asymptotique de $F(\xi)$ au voisinage de $\xi = 0$.

Partons de la formule (2), qui s'écrit, pour $T = \alpha$,

$$f\alpha[\psi] = \int \psi(u)\varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Posons $v = x_1^2 + \cdots + x_p^2$, $w = x_{p+1}^2 + \cdots + x_n^2$, de sorte que $u = v - w$. Désignons par R^p et R^q les sous-espaces de R^n définis respectivement par $x_{p+1} = \cdots = x_n = 0$ et $x_1 = \cdots = x_p = 0$, de sorte que $R^n = R^p \times R^q$, et soient x' et x'' les projections du point $x = (x_1, \ldots, x_n)$ sur R^p et R^q respectivement. Soit S'_v la sphère à $p-1$ dimensions de centre O et de rayon $\sqrt{v}$ dans R^p, σ' le point d'intersection avec S'_1 de la demi-droite issue de O passant par x'; le point x' est alors déterminé par ses coordonnées polaires σ' et v, et en dési-

gnant par $d\sigma'$ l'élément d'aire (à $p-1$ dimensions) de S'_1, l'élément de volume de R^p prend la forme

$$dx_1 \ldots dx_p = \frac{1}{2} v^{\frac{p-2}{2}} d\sigma' dv.$$

On définit d'une manière analogue la sphère à $q-1$ dimensions S''_w dans R^q, les coordonnées polaires σ'' et w de x'', et, l'élément d'aire (à $q-1$ dimensions) de S''_1 étant désigné par $d\sigma''$, l'élément de volume de R^q prend la forme

$$dx_{p+1} \ldots dx_n = \frac{1}{2} w^{\frac{q-2}{2}} d\sigma'' dw.$$

En posant $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \tilde{\varphi}(v, w; \sigma', \sigma'')$, la formule ci-dessus devient alors

$$f\alpha[\psi] = \frac{1}{4} \int \psi(v-w) v^{\frac{p-2}{2}} w^{\frac{q-2}{2}} \tilde{\varphi}(v, w; \sigma', \sigma'') d\sigma' d\sigma'' dv\, dw,$$

l'intégration devant être étendue à S'_1 par rapport à σ', à S''_1 par rapport à σ'', de 0 à ∞ par rapport à v et de 0 à ∞ par rapport à w.

En désignant par $\Phi(v, w)$ la *valeur moyenne de* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ sur $S'_v \times S''_w$ et par $s_{k-1} = \dfrac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$ l'aire à $k-1$ dimensions de la sphère de rayon 1 dans R^k, on a

$$\int \tilde{\varphi}(v, w; \sigma', \sigma'') d\sigma' d\sigma'' = s_{p-1} s_{q-1} \Phi(v, w),$$

et il vient

$$f\alpha[\psi] = \frac{s_{p-1} s_{q-1}}{4} \int_0^\infty \int_0^\infty \psi(v-w)\, \Phi(v, w)\, v^{\frac{p-2}{2}} w^{\frac{q-2}{2}} dv\, dw.$$

Décomposons cette intégrale double en la somme de deux intégrales étendues respectivement aux régions $v > w$ et $v < w$ du quadrant $v > 0$, $w > 0$. En substituant à v la variable $u = v - w$, la première devient

$$\int_0^\infty \psi(u)\, du \int_0^\infty \Phi(u+w, w)\, (u+w)^{\frac{p-2}{2}} w^{\frac{q-2}{2}} dw,$$

et en substituant $u = v - w$, la seconde devient

$$\int_{-\infty}^{0} \psi(u)du \int_{0}^{\infty} \Phi(v, v-u) v^{\frac{p-2}{2}} (v-u)^{\frac{q-2}{2}} dv.$$

En posant

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} F_1(\xi) = \int_0^\infty \Phi(\xi + w, w)\,(\xi + w)^{\frac{p-2}{2}} w^{\frac{q-2}{2}} dw, \\ F_2(\xi) = \int_0^\infty \Phi(v, v - \xi) v^{\frac{p-2}{2}} (v - \xi)^{\frac{q-2}{2}} dv, \\ F\,(\xi) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{s_{p-1}\, s_{q-1}}{4} F_1(\xi) & \text{pour} \quad \xi > 0, \\ \dfrac{s_{p-1}\, s_{q-1}}{4} F_2(\xi) & \text{pour} \quad \xi < 0, \end{array}\right. \end{array}\right.$$

il vient alors

$$f\alpha[\psi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\xi) F(\xi)\, d\xi$$

et l'on a bien $f\alpha = F(\xi)\, d\xi$.

C'est l'expression de $F(\xi)$ donnée par (6) qui va nous fournir son développement asymptotique. Il convient tout d'abord d'établir quelques propriétés de la fonction $\Phi(v, w)$, valeur moyenne de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ sur $S'_v \times S''_w$.

Cette fonction est définie pour $v \geqslant 0$ et $w \geqslant 0$, et il est clair que $\Phi(0, 0) = \varphi(0, \ldots, 0)$, ou, ce qui est la même chose, $\Phi(0, 0) = \delta_0[\alpha]$. Le support de φ étant compact, il existe un nombre R (dépendant de φ) tel que $\varphi = 0$ sur $S'_v \times S''_w$ pour $v + w > R^2$; par suite $\Phi\,(v, w) = 0$ pour $v + w > R^2$. Vérifions encore que *toutes les dérivées de* $\Phi(v, w)$ *sont continues pour* $v \geqslant 0$ *et* $w \geqslant 0$. Soient t' et t'' des transformations orthogonales quelconques des variables $x_1, \ldots, x_p$ et $x_{p+1}, \ldots, x_n$ respectivement. La fonction $\varphi(x;\ t',\ t'')$ transformée de $\varphi(x) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ par t' et t'' est, comme φ, une fonction C^∞ de $x_1, \ldots, x_n$ et elle a la même valeur moyenne $\Phi(v, w)$ sur $S'_v \times S''_w$. La valeur moyenne $\bar{\varphi}(x) = \bar{\varphi}(x_1, \ldots, x_n)$ de $\varphi(x;\ t',\ t'')$ par rapport à t' et à t'', calculée en intégrant sur les groupes orthogonaux à p et q variables, est encore une fonction C^∞ de $x_1, \ldots, x_n$ et a sur $S'_v \times S''_w$ la valeur constante $\Phi(v, w)$. Il en résulte

$$\Phi(v, w) = \bar{\varphi}(\pm\sqrt{v}, 0, \ldots, 0, \pm\sqrt{w}, 0, \ldots, 0)$$

où $\pm\sqrt{w}$ est mis à la place de x_{p+1}, ce qui montre que $\Phi(v, w)$ est égale à une fonction C^∞ de $s=\sqrt{v}$ et $t=\sqrt{w}$, paire par rapport à s, et paire par rapport à t, $\Phi(v,w)=\chi(s,t)$.

Cela entraîne

$$\frac{\partial\Phi(v, w)}{\partial v}=\chi_1(s, t) \qquad \text{avec} \qquad \chi_1(s, t)=\frac{1}{2s}\frac{\partial\chi(s, t)}{\partial s}.$$

Comme $\dfrac{\partial\chi(s, t)}{\partial s}$ est C^∞, impaire en s et paire en t, donc nulle pour $s=0$, $\chi_1(s, t)$ est C^∞, paire en s et paire en t, de sorte que $\dfrac{\partial\Phi(v, w)}{\partial v}$ est continue pour $v\geqslant 0$ et $w\geqslant 0$, comme $\Phi(v, w)$. En raisonnant par récurrence, on voit par la même argumentation que toute dérivée de $\Phi(v, w)$ est égale à une fonction C^∞ de s et t, paire en s et paire en t, ce qui établit notre assertion.

En tenant compte de (6), il résulte immédiatement de là que toutes les dérivées de $F(\xi)$ sont continues pour $\xi\neq 0$, qu'elles sont continues pour $\xi\leqslant 0$ si q est pair ($q\geqslant 2$), le point $\xi=0$ devant toutefois être présumé point de discontinuité de 1re espèce dans le cas où p et q sont pairs. Par contre, nous allons montrer que pour $\xi\to+0$ si p est impair et pour $\xi\to-0$ si q est impair, $F^{(h)}(\xi)$ a une partie infinie, que nous déterminerons à l'aide du lemme suivant, petite variante de celui qu'on trouve dans (M), p. 240.

Lemme. — Soit $F(x, y)$ une fonction des deux variables réelles x et y, définie et continue pour $x\geqslant 0$ et $y\geqslant 0$ ainsi que toutes ses dérivées, et soient a un nombre positif, m un entier $\geqslant -1$ et d un entier $\geqslant 0$. L'intégrale

$$J(\xi)=J(m, d, F)=\int_0^a F(w+\xi, w)\, w^{\frac{m}{2}}(w+\xi)^{\frac{-m-2-d}{2}}\,dw$$

a, pour $\xi\to+0$, une partie infinie qui est de la forme

$$Q_{\frac{d}{2}}(\xi)=a_{\frac{d}{2}}\xi^{-\frac{d}{2}}+a_{\frac{d-2}{2}}\xi^{-\frac{d-2}{2}}+\cdots+a_{\frac{1}{2}}\xi^{-\frac{1}{2}}$$

si d est impair, et de la forme

$$P_{\frac{d}{2}}(\xi)=b_{\frac{d}{2}}\xi^{-\frac{d}{2}}+b_{\frac{d-2}{2}}\xi^{-\frac{d-2}{2}}+\cdots+b_1\xi^{-1}+b_0\log\xi$$

si d est pair.

Les coefficients a_i et b_i de ces expressions ne dépendent ni de ξ ni de a, et l'on a en particulier

$$\begin{array}{ll} \text{pour } d \text{ impair,} & a_{\frac{d}{2}} \\ \text{pour } d \text{ pair } \geqslant 2, & b_{\frac{d}{2}} \end{array} \Bigg\} = \frac{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+d+2}{2}\right)} F(0, 0),$$

$$\text{pour } d = 0, \qquad b_0 = -F(0, 0).$$

Démonstration. — Commençons par le cas où $d = 0$. Si $m > 0$, on a, en intégrant par parties,

$$J(m, 0, F) = -\frac{2}{m}\int_0^a F(w + \xi, w) w^{\frac{m}{2}} d(w + \xi)^{-\frac{m}{2}}$$
$$= J(m-2, 0, F) + \cdots,$$

les termes non écrits ayant une limite finie pour $\xi \to +0$. Ainsi $J(m, 0, F)$ a la même partie infinie que $J(m-2, 0, F)$, donc que $J(0, 0, F)$ si m est pair et que $J(-1, 0, F)$ si m est impair. On a ensuite, en intégrant encore par parties,

$$J(0, 0, F) = \int_0^a F(w+\xi, w)\, d\log(w+\xi) = -F(0,0)\log\xi + \cdots,$$
$$J(-1, 0, F) = \int_0^a F(w+\xi, w)\, d\log\left(w + \frac{\xi}{2} + \sqrt{w^2 + w\xi}\right)$$
$$= -F(0, 0)\log\xi + \cdots,$$

les termes non écrits ayant encore une limite finie pour $\xi \to +0$. Cela prouve l'affirmation dans le cas où $d = 0$.

Supposons maintenant $d > 0$. Les fonctions $F'(x, y)$ et et $F''(x)$ définies par

$$F'(x, y) = \frac{F(x, y) - F(x, 0)}{y} \qquad \text{et} \qquad F''(x) = \frac{F(x, 0) - F(0, 0)}{x}$$

sont continues ainsi que toutes leurs dérivées pour $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$, et l'on a

$$F(w + \xi, w) = F(0, 0) + (w + \xi) F''(w + \xi) + wF'(w + \xi, w),$$

d'où résulte

$$J(m, d, F) = F(0, 0)\, J(m, d, 1) + J(m, d-2, F'')$$
$$+ J(m+2, d-2, F').$$

On a d'autre part

$$J(m, d, 1) = \int_0^\infty w^{\frac{m}{2}} (w + \xi)^{\frac{-m-2-d}{2}} dw - \int_a^\infty w^{\frac{m}{2}} (w + \xi)^{\frac{-m-2-d}{2}} dw,$$

et comme le dernier terme a une limite finie pour $\xi \to +0$, la partie infinie de $J(m, d, 1)$ est

$$\int_0^\infty w^{\frac{m}{2}} (w + \xi)^{\frac{-m-2-d}{2}} dw = \xi^{-\frac{d}{2}} \int_0^\infty \rho^{\frac{m}{2}} (\rho + 1)^{\frac{-m-2-d}{2}} d\rho$$

$$= \xi^{-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+d+2}{2}\right)}$$

en vertu de la formule bien connue

$$\int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

L'affirmation du lemme se déduit alors immédiatement de ce qui précède, en raisonnant par récurrence sur d et tenant compte (si d est pair) du résultat établi pour $d = 0$ et (si d est impair) du fait évident que $J(m, -1, F)$ a une limite finie pour $\xi \to +0$.

Pour déterminer la partie infinie de $F_1^{(h)}(\xi)$ pour $\xi \to +0$ dans le cas où p est impair, partons de (6). On obtient

$$(7) \qquad F_1^{(h)}(\xi) = \sum_{i=0}^{h} c_i \int_0^\infty \Phi^{(i,0)}(\xi + w, w)(\xi + w)^{\frac{p-2}{2} - h + i} w^{\frac{q-2}{2}} dw,$$

où l'on a posé $\Phi^{(i,0)}(x, y) = \dfrac{\partial^i \Phi(x, y)}{\partial x^i}$ et où les c_i sont des coefficients numériques qu'il est inutile de calculer pour l'instant. L'intégrale figurant dans le terme général de cette expression est de la même forme que celle du lemme, avec $m = q - 2$ et $d = 2h + 2 - n - 2i$. On voit que d est de même parité que n et sa plus grande valeur, atteinte pour $i = 0$, est $2h + 2 - n$. Il en résulte que, si $h \geqslant \dfrac{n-2}{2}$, *$F_1^{(h)}(\xi)$ et par suite $F^{(h)}(\xi)$ a pour $\xi \to +0$ une partie infinie de la forme $P_{h+\frac{2-n}{2}}(\xi)$ si n est pair et de la forme $Q_{h+\frac{2-n}{2}}(\xi)$ si n est impair, et si $h < \dfrac{n-2}{2}$, $F^{(h)}(\xi)$ tend vers une limite finie pour $\xi \to +0$.*

On a un résultat tout à fait analogue concernant $F_2^{(h)}(\xi)$ et $F^{(h)}(\xi)$ pour $\xi \to -0$ lorsque q est impair : il suffit de changer ξ en $-\xi$ et de permuter p et q pour se ramener au cas qui vient d'être examiné.

L'existence d'une partie infinie de $F^{(h)}(\xi)$ entraîne l'existence d'un développement asymptotique limité représentant $F(\xi)$ à une fonction près dont le quotient par ξ^h a une limite finie pour $\xi \to +0$ ou $\xi \to -0$, selon le cas, développement qu'on obtient, à un polynôme près de degré h, en intégrant h fois la partie infinie de $F^{(h)}(\xi)$. Comme h peut-être pris aussi grand qu'on veut, il en résulte l'existence d'un développement asymptotique illimité de $F(\xi)$, ou de H_ε, ce qui revient au même puisque $H_\varepsilon[\alpha] = F(\varepsilon)$, développement qui diffère, dans chacun des trois cas du nº 1, selon que $\varepsilon \to +0$ ou $\varepsilon \to -0$ et dont la forme, qui se déduit immédiatement de là, est la suivante.

1er *cas* (n impair, p impair, q pair)

$$(8) \qquad H_\varepsilon \sim \begin{cases} \sum_0^\infty A_h \varepsilon^h + B_h \varepsilon^{h+\frac{n-2}{2}} & \text{pour} \quad \varepsilon \to +0, \\ \sum_0^\infty A'_h \varepsilon^h & \text{pour} \quad \varepsilon \to -0. \end{cases}$$

2e *cas* (n pair, p et q pairs)

$$(9) \qquad H_\varepsilon \sim \begin{cases} \sum_0^\infty A'_h \varepsilon^h & \text{pour} \quad \varepsilon \to +0, \\ \sum_0^\infty A_h \varepsilon^h & \text{pour} \quad \varepsilon \to -0. \end{cases}$$

3e *cas* (n pair, p et q impairs)

$$(10) \qquad H_\varepsilon \sim \begin{cases} \sum_0^\infty A'_h \varepsilon^h + B'_h \varepsilon^{h+\frac{n-2}{2}} \log \varepsilon & \text{pour} \quad \varepsilon \to +0, \\ \sum_0^\infty A_h \varepsilon^h + B_h \varepsilon^{h+\frac{n-2}{2}} \log|\varepsilon| & \text{pour} \quad \varepsilon \to -0. \end{cases}$$

Le raisonnement par lequel a été établie l'existence du développement asymptotique de $F(\xi)$ s'applique de la même manière à $F^{(k)}(\xi)$. Par suite, $\dfrac{d^k}{d\varepsilon^k} H_\varepsilon = (-1)^k H_\varepsilon^k$ possède aussi un développement asymptotique illimité, développement qu'on

pourra déduire de celui de H_ε par dérivation. *Ces développements peuvent ainsi être dérivés par rapport à* ε *autant de fois que l'on veut.*

Les coefficients de ces développements sont des distributions. Pour les déterminer, il convient d'utiliser certaines relations de récurrence, comme l'a fait M. Méthée dans le cas où $p = 1$. Considérons les opérateurs différentiels adjoints

$$(11)\qquad D = D_\xi = \left(4\xi\frac{d}{d\xi} + 2n\right)\frac{d}{d\xi},$$
$$D^* = D^*_\xi = \left(4\xi\frac{d}{d\xi} + 8 - 2n\right)\frac{d}{d\xi}.$$

On a les relations

$$(12)\qquad \square f^*S = f^*DS, \qquad f\square T = D^*fT.$$

La première, valable pour toute distribution S dans R^1, s'établit aisément par calcul direct, et la seconde, valable pour tout courant T de degré n à support compact dans R^n, se déduit de la première par dualité (Cf. (M) p. 235). Comme $f\alpha = F(\xi)\,d\xi$, en prenant $T = \alpha$, on a $f\square\alpha = D^*_\xi F(\xi)\,d\xi$, par suite

$$H_\varepsilon[\square\alpha] = \delta_\varepsilon[D^*_\xi F(\xi)\,d\xi] = D^*_\varepsilon F(\varepsilon),$$

et comme
$$\square H_\varepsilon[\alpha] = H_\varepsilon[\square\alpha],$$

on a
$$\square H_\varepsilon = D^*_\varepsilon H_\varepsilon = \left(4\varepsilon\frac{d}{d\varepsilon} + 8 - 2n\right)\frac{d}{d\varepsilon}H_\varepsilon.$$

En vertu de cette relation, le développement asymptotique de $\square H_\varepsilon$ peut être obtenu de deux manières : soit en appliquant l'opération $\square$ aux coefficients du développement de H_ε, soit en effectuant sur ce développement l'opération $D^*_\varepsilon = \left(4\varepsilon\frac{d}{d\varepsilon} + 8 - 2n\right)\frac{d}{d\varepsilon}$. Par identification des deux résultats, on obtient, selon les cas, l'une ou l'autre des relations suivantes et celles qui s'en déduisent en remplaçant A et B par A′ et B′.

$$(13)\qquad \square A_h = 4(h+1)\left(h + 2 - \frac{n}{2}\right)A_{h+1},$$

$$(14)\qquad \square A_h = 4(h+1)\left(h+2-\frac{n}{2}\right)A_{h+1} + (8h+12-2n)B_{h-\frac{n}{2}+2},$$

$$(15)\qquad \square B_h = 4(h+1)\left(h+\frac{n}{2}\right)B_{h+1}.$$

La relation (13) et la relation analogue avec A' au lieu de A sont valables pour tout h dans le 1er et dans le 2e cas, et pour $h < \frac{n-4}{2}$ dans le 3e cas.

La relation (14) et la relation analogue avec A' et B' au lieu de A et B sont valables pour $h \geqslant \frac{n-4}{2}$ dans le 3e cas.

La relation (15) est valable pour tout h dans le 1er et dans le 3e cas, et la relation analogue à (15) avec B' au lieu de B est valable pour tout h dans le 3e cas.

Remarquons que le coefficient numérique de A_{h+1} au second membre de (13) et de (14) ne peut s'annuler que si n est pair, pour $h = \frac{n-4}{2}$; celui de B_{h+1} au second membre de (15) ne s'annule jamais, ni celui de $B_{h-\frac{n}{2}+2}$ dans (14) puisque cette formule ne vaut que pour $h \geqslant \frac{n-4}{2}$.

Les formules (6) montrent que $\lim\limits_{\xi \to +0} F_1(\xi) = \lim\limits_{\xi \to -0} F_2(\xi)$; il en résulte $\lim\limits_{\varepsilon \to +0} H_\varepsilon = \lim\limits_{\varepsilon \to -0} H_\varepsilon = H_0$, d'où, dans tous les cas, $A_0 = A'_0$. A l'aide de (13) et de la relation analogue avec A' au lieu de A, on en déduit $A'_h = A_h$ pour tout h dans le 1er cas et pour $h \leq \frac{n-4}{2}$ dans le 2e et dans le 3e cas. Dans le 3e cas, (14) entraîne $\left(\text{pour } h = \frac{n-4}{2}\right) \square A_{\frac{n-4}{2}} = (2n-4)B_0$, et de même $\square A'_{\frac{n-4}{2}} = (2n-4)B'_0$, d'où $B_0 = B'_0$, puisque $A_{\frac{n-4}{2}} = A'_{\frac{n-4}{2}}$. A l'aide de (15) et de la relation analogue avec B' au lieu de B, on en déduit $B'_h = B_h$ pour tout h. Nous montrerons plus loin directement que, dans le 3e cas, $A_{\frac{n-2}{2}} = A'_{\frac{n-2}{2}}$; à l'aide de (14) et de la relation analogue avec A' et B' au lieu de A et B, cela entraîne que dans le 3e cas $A_h = A'_h$ pour tout h.

Dans le 2e cas, il est commode de poser $B_h = A'_{h+\frac{n-2}{2}} - A_{h+\frac{n-2}{2}}$. La relation (13) et la relation analogue avec A' au lieu de A entraînent alors que la relation (15) est encore vérifiée.

Il est alors possible, en utilisant la fonction d'Heaviside $Y(\varepsilon)$, de mettre sous une même forme les développements asymptotiques relatifs à $\varepsilon > 0$ et $\varepsilon < 0$, et, sous réserve de l'égalité $A_{\frac{n-2}{2}} = A'_{\frac{n-2}{2}}$ dans le 3e cas et de la valeur de B_0 qui sera calculée plus loin, nous pouvons énoncer :

Dans le 1er et dans le 2e cas, on a

$$\text{(16)} \qquad H_\varepsilon \sim \sum_0^\infty A_h \varepsilon^h + B_h \varepsilon^{h+\frac{n-2}{2}} Y(\varepsilon),$$

$$\text{(17)} \qquad B_0 = (-1)^{\frac{q}{2}} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \delta_0$$

et les relations (13) *et* (15) *sont valables pour tout h. Dans le* 1er *cas, tous les coefficients se déduisent, par ces relations, de* A_0 *et de* B_0. *Dans le* 2e *cas, ils se déduisent tous de* A_0, $A_{\frac{n-2}{2}}$ *et* B_0 *et l'on a* $\Box A_{\frac{n-4}{2}} = 0$.

Dans le 3e cas, on a

$$\text{(18)} \qquad H_\varepsilon \sim \sum_0^\infty A_h \varepsilon^h + B_h \varepsilon^{h+\frac{n-2}{2}} \log|\varepsilon|,$$

$$\text{(19)} \qquad B_0 = (-1)^{\frac{q+1}{2}} \frac{\pi^{\frac{n-2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \delta_0,$$

la relation (13) *est valable pour* $h < \frac{n-4}{2}$, *la relation* (14) *pour* $h \geqslant \frac{n-4}{2}$ *et la relation* (15) *pour tout h. Tous les coefficients se déduisent, par ces relations, de* A_0 *et de* $A_{\frac{n-2}{2}}$, *et l'on a* $\Box A_{\frac{n-4}{2}} = (2n-4)B_0$.

Il faut remarquer que le développement donné par (16) a deux structures différentes dans le 1er cas, où n est impair, et dans le 2e cas, où n est pair. Dans le 2e cas, comme (9) le montre bien, il a la forme de Taylor aussi bien pour $\varepsilon > 0$ que pour $\varepsilon < 0$; dans le 1er cas, comme (8) le montre bien, il n'a la forme de Taylor que pour $\varepsilon < 0$.

Pour achever la démonstration, il ne reste qu'à calculer B_0 et à vérifier que, dans le 3^e cas, $A'_{\frac{n-2}{2}} = A_{\frac{n-2}{2}}$.

Calcul de B_0 *dans le* 1^{er} *cas*. La partie infinie de $\left(\frac{d}{d\varepsilon}\right)^{\frac{n-1}{2}} H_\varepsilon$ pour $\varepsilon \rightarrow +0$ est égale à

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} B_0 \varepsilon^{-\frac{1}{2}}.$$

Cela se déduit directement de (8) ou (16), par dérivation. D'autre part, à l'aide de (7) avec $h = \frac{n-1}{2}$, on voit que, pour $\xi \rightarrow +0$, $F_1^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(\xi)$ a la même partie infinie que

$$c_0 \int_0^\infty \Phi(\xi + w, w)(\xi + w)^{\frac{-q-1}{2}} w^{\frac{q-2}{2}} dw,$$

car pour $h = \frac{n-1}{2}$ les termes au second membre de (7) qui correspondent à des valeurs de $i > 0$ ont une limite finie pour $\xi \rightarrow +0$. En vertu du lemme (cas où $m = q - 2$ et $d = 1$), cette partie infinie est

$$c_0 \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)} \Phi(0, 0)\xi^{-\frac{1}{2}}$$

et le coefficient numérique c_0, qui s'introduit en dérivant $\frac{n-1}{2}$ fois $(\xi + w)^{\frac{p-2}{2}}$, a pour valeur

$$c_0 = \frac{p-2}{2}\frac{p-4}{2}\cdots\frac{1-q}{2} = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-q}{2}\right)}.$$

Comme

$$H_\varepsilon[\alpha] = F(\varepsilon) = \frac{s_{p-1}s_{q-1}}{4} F_1(\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \Phi(0,\ 0) = \delta_0[\alpha],$$

il vient

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} B_0 = \frac{s_{p-1}s_{q-1}}{4} c_0 \frac{\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)} \delta_0.$$

En tenant compte de la relation $\Gamma\left(\frac{1-q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+q}{2}\right) = (-1)^{\frac{q}{2}}\pi$, on obtient alors facilement la relation (17).

Calcul de B_0 *dans le* 3e *cas.* La partie infinie de $\left(\frac{d}{d\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2}} H_\varepsilon$, pour $\varepsilon \to +0$ comme pour $\varepsilon \to -0$, est alors égale à $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) B_0 \log|\varepsilon|$. Cela se déduit directement de (10) ou (18), par dérivation. D'autre part, à l'aide de (7) avec $h = \frac{n-2}{2}$, on voit que, pour $\xi \to +0$, $F_1^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi)$ a la même partie infinie que

$$c_0 \int_0^\infty \Phi(\xi + w, w)(\xi + w)^{-\frac{q}{2}} w^{\frac{q-2}{2}} dw,$$

soit, en vertu du lemme (cas où $m = q - 2$ et $d = 0$), $-c_0\Phi(0, 0)\log\xi$, et le coefficient c_0, qui s'introduit en dérivant $\frac{n-2}{2}$ fois $(\xi + w)^{\frac{p-2}{2}}$ a pour valeur

$$c_0 = \frac{p-2}{2}\frac{p-4}{2}\cdots\frac{2-q}{2} = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-q}{2}\right)}$$

La relation (19) se déduit de là de la même manière qu'on a obtenu (17) dans le 1er cas, à l'aide de la relation $H_\varepsilon[\alpha] = \frac{s_{p-1}s_{q-1}}{4} F_1(\varepsilon)$.

Calcul de $A'_{\frac{n-2}{2}} - A_{\frac{n-2}{2}}$ *dans les* 2e *et* 3e *cas.* On déduit de (9) dans le 2e cas,

$$A'_{\frac{n-2}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \lim_{\varepsilon \to +0} \left(\frac{d}{d\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2}} H_\varepsilon, \qquad A_{\frac{n-2}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \lim_{\varepsilon \to -0} \left(\frac{d}{d\varepsilon}\right)^{\frac{n-2}{2}} H_\varepsilon,$$

d'où

$$(20)\quad A'_{\frac{n-2}{2}}[\alpha]-A_{\frac{n-2}{2}}[\alpha]=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\lim_{\xi\to+0}\left[F^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi)-F^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi)\right]$$

$$=\frac{s_{p-1}s_{q-1}}{4\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\lim_{\xi\to+0}\left[F_1^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi)-F_2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi)\right].$$

Cette relation (20) est aussi valable dans le 3e cas : elle se déduit alors de (10), où l'on sait que $B_0 = B'_0$. Dans ce cas, $F_1^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi)$ et $F_2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi)$ n'ont pas de limite pour $\xi \to +0$, mais ont la même partie infinie (précisément parce que $B_0 = B'_0$).

Pour calculer la limite figurant dans (20), considérons la fonction

$$K(\xi)=\int_a^\infty \Phi(\xi+w, w)\,(\xi+w)^{\frac{p-2}{2}}w^{\frac{q-2}{2}}\,dw$$

$$=\int_{a+\xi}^\infty \Phi(v, v-\xi)v^{\frac{p-2}{2}}(v-\xi)^{\frac{q-2}{2}}\,dv,$$

où a est un nombre >0 donné quelconque, et les fonctions $G_1(\xi) = F_1(\xi) - K(\xi)$ et $G_2(\xi) = F_2(\xi) - K(\xi)$. La fonction $K(\xi)$ est définie et C^∞ pour $\xi > -a$, $G_1(\xi)$ est définie pour $\xi > 0$ et $G_2(\xi)$ est définie pour $-a < \xi < 0$.

Comme $K^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi)$ est continue au point $\xi = 0$, on a

$$(21)\quad \lim_{\to+0}\left[F_1^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi)-F_2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi)\right]=\lim_{\xi\to+0}\left[G_1^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi)-G_2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi)\right]$$

La limite au second membre de (21) ne dépend donc pas de a.

$G_1(\xi)$ et $G_2(\xi)$ sont représentées par des intégrales qui se déduisent de celles définissant $F_1(\xi)$ et $F_2(\xi)$ dans (6) en remplaçant la limite supérieure ∞ par a et $a+\xi$ respectivement. Par dérivation, on en déduit

$$(22)\quad G_1^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi)=\int_0^a\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left[\Phi(\xi+w,w)(\xi+w)^{\frac{p-2}{2}}\right]w^{\frac{q-2}{2}}\,dw,$$

et, en changeant ξ en $-\xi$,

(23)

$$G_2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi)=(-1)^{\frac{n-2}{2}}\int_0^{a-\xi}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left[\Phi(\varphi,\varphi+\xi)(\varphi+\xi)^{\frac{q-2}{2}}\right]\varphi^{\frac{p-2}{2}}d\varphi$$
$$+(-1)^n\sum_{j=0}^{\frac{n-4}{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{\frac{n-4}{2}-j}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^j\left\{\Phi(\varphi,\varphi+\xi)(\varphi+\xi)^{\frac{q-2}{2}}\right\}\varphi^{\frac{p-2}{2}}\right]_{\varphi=a-\xi}.$$

Supposons d'abord que $\Phi\,(x, y)$ soit de la forme $x\Phi_1(x, y)$, $\Phi_1(x, y)$ étant continue ainsi que toutes ses dérivées pour $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$. Dans (22) et (23), on peut alors simplement remplacer Φ par Φ_1 et p par $p+2$; on constate qu'alors les intégrales sont convergentes pour $\xi=0$ même dans le 3e cas, de sorte que $G_1^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi)$ et $G_2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi)$ ont des limites finies pour $\xi \to +0$, et l'on vérifie facilement que, dans le 2e cas comme dans le 3e cas, ces limites tendent vers 0 pour $a \to 0$. Comme leur différence ne dépend pas de a, elle est nulle. Il en est de même lorsque $\Phi(x, y)$ est de la forme $y\Phi_2(x, y)$.

Cela entraîne que, $\Phi(x, y)$ pouvant toujours se mettre sous la forme $\Phi(x, y) = \Phi(0, 0) + x\Phi_1(x, y) + y\,\Phi_2(x, y)$, la limite au second membre de (21) est égale à $C\Phi(0, 0)$, où C est une constante numérique, valeur de cette même limite lorsque $\Phi \equiv 1$. En se reportant à (20), il vient alors

$$A'_{\frac{n-2}{2}} - A_{\frac{n-2}{2}} = \frac{s_{p-1}s_{q-1}}{4\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}C\delta_O. \tag{24}$$

Pour calculer C, désignons par $J_1(\xi)$ et $J_2(\xi)$ ce que deviennent $G_1(\xi)$ et $G_2(\xi)$ lorsqu'on remplace Φ par 1. On a

$$J_1(\xi) = \int_0^a(\xi+w)^{\frac{p-2}{2}}w^{\frac{q-2}{2}}dw = \int_\xi^{a+\xi}\varphi^{\frac{p-2}{2}}(\varphi-\xi)^{\frac{q-2}{2}}d\varphi,$$
$$J_2(\xi) = \int_0^{a+\xi}\varphi^{\frac{p-2}{2}}(\varphi-\xi)^{\frac{q-2}{2}}d\varphi$$

et

$$C = \lim_{\xi \to +0}\left[J_1^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi) - J_2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi)\right]. \tag{25}$$

Dans le 2e *cas*, p et q étant pairs, les fonctions $J_1(\xi)$ et $J_2(\xi)$ sont définies et C^∞ pour tout ξ; par suite, en posant

$$J(\xi) = J_1(\xi) - J_2(\xi) = -\int_0^\xi v^{\frac{p-2}{2}}(v-\xi)^{\frac{q-2}{2}}\,dv,$$

il vient $C = J^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(0)$, d'où par un calcul facile,

$$C = (-1)^{\frac{q}{2}}\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p}{2}\right).$$

En se reportant à (24), on obtient alors pour $B_0 = A'_{\frac{n-2}{2}} - A_{\frac{n-2}{2}}$ la valeur donnée par (17).

Il reste à vérifier que, *dans le* 3e *cas*, $C = 0$. En posant

$$\frac{p-1}{2} = h,\ \frac{q-1}{2} = k, \qquad \text{de sorte que} \qquad h+k = \frac{n-2}{2},$$

on a

$$J_1(\xi) = \int_0^a (\xi+w)^{h-\frac{1}{2}} w^{k-\frac{1}{2}}\,dw, \quad J_2(\xi) = \int_0^{a+\xi} w^{h-\frac{1}{2}}(w-\xi)^{k-\frac{1}{2}}\,dw,$$

et l'on obtient en dérivant

$$J_1^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi) = \frac{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}\right)} \cdot \int_0^a (\xi+w)^{-k-\frac{1}{2}} w^{k-\frac{1}{2}}\,dw,$$

$$J_2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi) = (-1)^{h+k}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-h+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{a-\xi}(\xi+w)^{-h-\frac{1}{2}} w^{h-\frac{1}{2}}\,dw$$

$$+ (-1)^{h+k+1}\sum_{j=0}^{h-k+1}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^{h+k-1-j}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\right)^j (\xi+w)^{k-\frac{1}{2}} w^{h-\frac{1}{2}}\right]_{w=a-\xi}.$$

En effectuant les dérivations et tenant compte de la relation

$$(-1)^{h+k}\frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-h+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}\right)},$$

il vient

$$J_2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi) = \frac{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}\right)} \int_0^{a-\xi} (\xi+w)^{-h-\frac{1}{2}} w^{h-\frac{1}{2}}\, dw$$

$$+ \sum_{j=0}^{h+k-1} (-1)^j \frac{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(j-k+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(k-j+\frac{1}{2}\right)} (a-\xi)^{j-k+\frac{1}{2}} a^{k-j-\frac{1}{2}}.$$

En posant

$$I_h = \int_0^a (\xi+w)^{-h-\frac{1}{2}} w^{h-\frac{1}{2}}\, dw,$$

on peut alors écrire

$$(26)\quad J_1^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(\xi) - J_2^{\left(\frac{n-2}{2}\right)}(-\xi) = \frac{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}\right)} (I_k - I_h)$$

$$- \sum_{j=0}^{h+k-i} (-1)^j \frac{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(j-k+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(k-j+\frac{1}{2}\right)} + o(1),$$

où $o(1)$ désigne, selon l'usage, une expression qui $\to 0$ pour $\xi \to +0$.

Lorsque $h = k$, les termes équidistants des extrêmes dans la somme au second membre de (26) sont opposés, cette somme est donc nulle, ce qui entraîne $C = 0$.

Si $h > k$, soit $h = k + l$. De la relation

$$I_k = I_{k+1} + \frac{1}{k+\frac{1}{2}} + o(1),$$

qu'on vérifie en intégrant par parties, on déduit

$$I_k - I_h = I_k - I_{k+l} = \sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{k+j\pm\frac{1}{2}} + o(1),$$

d'où, en substituant dans (26) et prenant la limite pour $\xi \to +0$,

$$C = \frac{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}\right)} \sum_{j=1}^{l-1} \frac{1}{k+j+\frac{1}{2}} - \sum_{j=0}^{h+k-1} (-1)^j \frac{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(j-k+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(k-j+\frac{1}{2}\right)}.$$

En tenant compte des relations $\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = (-1)^k\pi$ et

$$\Gamma\left(j-k+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(k-j+\frac{1}{2}\right) = (-1)^{k-j}\left(j-k+\frac{1}{2}\right)\pi,$$

il vient

$$C = \frac{\Gamma\left(h+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-k+\frac{1}{2}\right)}\left(\sum_{j=0}^{l-1} \frac{1}{k+j+\frac{1}{2}} - \sum_{j=0}^{2k+l-1} \frac{1}{j-k+\frac{1}{2}}\right).$$

et l'on vérifie facilement que l'expression dans la parenthèse se réduit à zéro. Le calcul est presque le même si $h < k$. On a donc bien toutjours $C = 0$ dans le 3e cas.

3. Solution élémentaire.

A l'aide du développement asymptotique de H_ε établi au n° 2, nous allons déterminer la solution élémentaire de $\square$ et démontrer les résultats énoncés au n° 1, de la même manière que l'a fait M. Méthée dans le cas de l'équation des ondes où $p = 1$.

En posant, pour n impair $\geqslant 3$,

$$S_1 = \underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{Pf}}\, Y(\xi - \varepsilon)\xi^{\frac{2-n}{2}}, \qquad S_2 = \underset{\varepsilon \to -0}{\mathrm{Pf}}\, Y(\varepsilon - \xi)|\xi|^{\frac{2-n}{2}}$$

et pour n pair $\geqslant 4$,

$$S_1 = \underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{P}f}\, Y(\xi - \varepsilon)\xi^{\frac{2-n}{2}} + \underset{\varepsilon \to -0}{\mathrm{P}f}\, Y(\varepsilon - \xi)\xi^{\frac{2-n}{2}}, \qquad S_2 = \delta^{\left(\frac{n-4}{2}\right)}$$

la distribution la plus générale S dans R^1 satisfaisant à l'équation $DS = 0$ où D est défini par (11), est donnée par

$$S = aS_1 + bS_2 + c,$$

avec trois constantes arbitraires a, b et c (voir (M) p. 259-260).

En vertu de (12), il en résulte que la distribution la plus générale T dans $R^n - O$ qui satisfait à $\square T = 0$ dans $R^n - O$ et qui est de la forme $T = f^*S$, est $T = af^*S_1 + bf^*S_2 + c$, et il est évident que f^*S_1 et f^*S_2 sont respectivement égales (dans $R^n - O$) aux distributions T_1 et T_2 définies au nº 1. Mais les formules du nº 1 définissent T_1 et T_2 dans R^n, et non seulement dans $R^n - O$; pour s'en assurer, il suffit de vérifier que les parties finies qui interviennent dans ces formules ont un sens. Cela est presque immédiat. Considérons par exemple la distribution

$$Y(u - \varepsilon)\, u^{\frac{2-n}{2}} \qquad \text{pour} \qquad \varepsilon > 0;$$

sa dérivée $\dfrac{d}{d\varepsilon} Y(u - \varepsilon)u^{\frac{2-n}{2}} = -\varepsilon^{\frac{2-n}{2}} H_\varepsilon$ possède une partie infinie, qu'on obtient en multipliant le développement asymptotique de H_ε par $-\varepsilon^{\frac{2-n}{2}}$ et en ne conservant que les termes qui n'ont pas de limite pour $\varepsilon \to +0$; par suite, $Y(u-\varepsilon)u^{\frac{2-n}{2}}$ a aussi une partie infinie et $\underset{\varepsilon \to +0}{\mathrm{P}f}\, Y(u - \varepsilon)u^{\frac{2-n}{2}}$ a bien un sens. Dans les cas où n est pair, on voit aussi que l'on a

$$T_2 = \lim_{\varepsilon = 0} H_\varepsilon^{\frac{n-4}{2}} = \lim_{\varepsilon = 0} (-1)^{\frac{n-4}{2}} \left(\frac{d}{d\varepsilon}\right)^{\frac{n-4}{2}} H_\varepsilon = (-1)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) A_{\frac{n-4}{2}}.$$

Ce qui précède montre que T_1 et T_2 sont bien définies dans R^n et que les distributions $\square T_1$ et $\square T_2$, si elles ne sont pas nulles, ont un support qui se réduit au point O.

Pour n pair, la formule ci-dessus donne, en tenant compte

de la valeur de $\square A_{\frac{n-4}{2}}$ trouvée au nº 2, dans le 2e cas $\square T_2 = 0$ et dans le 3e cas

$$\square T_2 = (-1)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) \square A_{\frac{n-4}{2}}$$

$$= (-1)^{\frac{n+q+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \pi^{\frac{n-2}{2}} (2n-4) \delta_0 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} 4\pi^{\frac{n-2}{2}} \delta_0,$$

d'où il résulte que la solution élémentaire est bien celle indiquée au nº 1 pour le 3e cas.

Il reste à calculer $\square T_1$ dans chacun des trois cas et $\square T_2$ dans le 1er cas.

Dans le 1er cas, on a, pour $\varepsilon > 0$, par un calcul facile (cf. (M) p. 259-260),

$$D_\xi Y(\xi - \varepsilon) \xi^{\frac{2-n}{2}} = 4\varepsilon^{\frac{4-n}{2}} \delta'_\varepsilon,$$

d'où

$$\square Y(u - \varepsilon) u^{\frac{2-n}{2}} = 4\varepsilon^{\frac{4-n}{2}} H'_\varepsilon.$$

A l'aide du développement asymptotique de $H'_\varepsilon = -\dfrac{d}{d\varepsilon} H_\varepsilon$, on obtient

$$\underset{\varepsilon \to +0}{Pf}\, \varepsilon^{\frac{4-n}{2}} H'_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{2-n}{2}} B_0,$$

d'où, les opérations $\square$ et Pf étant permutables,

$$\square T_1 = \underset{\varepsilon \to +0}{Pf}\, \square Y(u - \varepsilon) u^{\frac{2-n}{2}} = (4 - 2n) B_0,$$

d'où résulte que la solution élémentaire est bien celle indiquée au nº 1. On obtient de même, pour $\varepsilon < 0$,

$$D_\xi Y(\varepsilon - \xi) |\xi|^{\frac{2-n}{2}} = 4(-\varepsilon)^{\frac{4-n}{2}} \delta'_\xi$$

d'où

$$\square Y(u - \varepsilon) |u|^{\frac{2-n}{2}} = 4(-\varepsilon)^{\frac{4-n}{2}} H'_\varepsilon.$$

Le développement asymptotique montre immédiatement que, dans le 1er cas, $\underset{\xi \to -0}{Pf} (-\varepsilon)^{\frac{4-n}{2}} H'_\xi = 0$, d'où résulte que $\square T_2 = 0$.

Si n est pair, on obtient de la même manière

$$\square\, Y(u-\varepsilon)\, u^{\frac{2-n}{2}} = 4\varepsilon^{\frac{4-n}{2}} H^1_\varepsilon \qquad \text{pour} \qquad \varepsilon > 0,$$

$$\square\, Y(\varepsilon-u)\, u^{\frac{2-n}{2}} = -4\varepsilon^{\frac{4-n}{2}} H^1_\varepsilon \qquad \text{pour} \qquad \varepsilon < 0.$$

Dans le 2e cas, on déduit des développements asymptotiques

$$\underset{\varepsilon\to+0}{\mathrm{P}f}\ \varepsilon^{\frac{4-n}{2}} H^1_\varepsilon = -\frac{n-2}{2}\left(A_{\frac{n-2}{2}} + B_0\right),$$

$$\underset{\varepsilon\to-0}{\mathrm{P}f}\ \varepsilon^{\frac{4-n}{2}} H^1_\varepsilon = -\frac{n-2}{2} A_{\frac{n-2}{2}},$$

ce qui entraîne $\square T_1 = (4-2n) B_0$ et montre que la solutoin élémentaire est bien celle indiquée au n° 1.

Dans le 3e cas, on déduit des développements asymptotiques

$$\underset{\varepsilon\to+0}{\mathrm{P}f}\ \varepsilon^{\frac{4-n}{2}} H^1_\varepsilon = \underset{\varepsilon\to-0}{\mathrm{P}f}\ \varepsilon^{\frac{4-n}{2}} H^1_\varepsilon = -\frac{n-2}{2} A_{\frac{n-2}{2}} - B_0,$$

d'où résulte $\square T_1 = 0$, ce qui achève la démonstration des résultats annoncés au n° 1.

Les solutions élémentaires qui viennent d'être déterminées, en vertu de leur définition même, jouissent de la propriété d'être invariantes vis-à-vis du groupe G de toutes les transformations linéaires de R^n en lui-même laissant u invariante et même vis-à-vis de tous les homéormorphismes C^∞ de R^n en lui-même laissant u invariante. Il est facile de voir dans quelle mesure elles sont caractérisées par cette propriété. On sait en effet que toute distribution définie dans $R^n - O$ et invariante vis-à-vis de G est de la forme f^*S, S étant une distribution quelconque dans R^1, et que les distributions dans R^n invariantes vis-à-vis de G et dont le support se réduit au point O sont les combinaisons linéaires des distributions $\square^k \delta_0 (k = 0, 1, 2, \ldots)$ [5]. Il découle alors des résultats établis ci-dessus que *la distribution la plus générale* T *dans* R^n *qui satisfait à l'équation* $\square T = \delta_0$ *et qui est invariante vis-à-vis de* G *est* $T = E + aT_2 + b$ *dans le* 1er *cas et dans le* 2e *cas,* et $T = E + aT_1 + b$ *dans le* 3e *cas, avec deux constantes arbitraires* a *et* b.

[5] Ces faits sont établis dans (M) pour $p = 1$, mais la démonstration subsiste quel que soit p. Voir : G. de Rham, *sur la division de formes et de courants par une forme linéaire,* Commentarii Mathematici Helvetici 28 (1954), p. 346-352.

Le cas où $p = 1$, dont on trouvera l'étude détaillée dans (M), présente une particularité due au fait que, pour $\varepsilon > 0$, l'hyperboloide $u = \varepsilon$ se décompose en deux nappes. La solution élémentaire peut alors être décomposée en la somme

$$E = E_1 + E_2$$

de deux distributions ayant leurs supports contenus respectivement dans le demi-cône « d'avenir » ($x_1 \geqslant 0$, $u = 0$ ou $u \geqslant 0$) et dans le demi-cône « de passé » ($x_1 \leqslant 0$, $u = 0$ ou $u \geqslant 0$), et telles que $\square E_1 = \square E_2 = \frac{1}{2}\delta_O$. La solution élémentaire qui intervient dans la résolution du problème de Cauchy relatif à l'équation des ondes est $2E_1$.

Dans le cas de l'équation de Laplace, $p = n$ et $q = 0$, la méthode suivie s'applique très facilement. Le cône $u = 0$ se réduit alors au point O et le développement asymptotique de H_ε se déduit de (16) en remplaçant A_h par 0 pour tout h, les relations (15) et (17) avec $q = 0$ étant encore valables. On en déduit immédiatement la solution élémentaire bien connue rappelée au n° 1.

4. Autre expression des distributions T_1 et T_2.

Je vais montrer que les distributions T_1 et T_2, définies au n° 1, à l'aide desquelles on a représenté toutes les solutions élémentaires invariantes de l'opérateur $\square$, sont égales, à un facteur constant près, à $\square^{\frac{n-3}{2}} Y(u)u^{-\frac{1}{2}}$ et $\square^{\frac{n-3}{2}} Y(-u)|u|^{-\frac{1}{2}}$ pour n impair et à $\square^{\frac{n-2}{2}} \log|u|$ et $\square^{\frac{n-2}{2}} Y(u)$ pour n pair.

Un calcul facile montre qu'on a, pour $\varepsilon > 0$,

$$D_\xi Y(\xi - \varepsilon)\xi^\lambda = (2n - 4 + 4\lambda)\varepsilon^\lambda \delta_\varepsilon + 4\varepsilon^{\lambda+1}\delta'_\varepsilon + \lambda(2n - 4 + 4\lambda)\, Y(\xi - \varepsilon)\xi^{\lambda-1},$$

$$D_\xi Y(\xi - \varepsilon)\log\xi = (2n - 4 + 4\log\varepsilon)\delta_\varepsilon + 4\varepsilon\log\varepsilon\,.\,\delta'_\varepsilon + (2n - 4)\, Y(\xi - \varepsilon)\xi^{-1}.$$

On en déduit immédiatement, pour $\varepsilon > 0$,

$$\square\, Y(u - \varepsilon)u^\lambda = (2n - 4 + 4\lambda)\varepsilon^\lambda H_\varepsilon + 4\varepsilon^{\lambda+1}H^1_\varepsilon + \lambda(2n - 4 + 4\lambda)\, Y(u - \varepsilon)u^{\lambda-1}, \tag{26}$$

$$\square\, Y(u - \varepsilon)\log u = (2n + 4 - 4\log\varepsilon)\, H_\varepsilon + 4\varepsilon\log\varepsilon\,.\,H^1_\varepsilon + (2n - 4)\, Y(u - \varepsilon)u^{-1}. \tag{27}$$

D'une manière analogue, on obtient, pour $\varepsilon < 0$,

$$(28)\quad \square\, Y(\varepsilon - u)|u|^{\lambda} = 4|\varepsilon|^{\lambda+1}H_{\varepsilon}^{1} - (2n - 4 + 4\lambda)|\varepsilon|^{\lambda}H_{\varepsilon} - \lambda(2n - 4 + 4\lambda)Y(\varepsilon - u)|u|^{\lambda-1},$$

$$(29)\quad \square\, Y(\varepsilon - u)\log|u| = -(2n + 4 - 4\log\varepsilon)H_{\varepsilon} - 4\varepsilon\log|\varepsilon|.\, H_{\varepsilon}^{1} + (2n - 4)\,Y(\varepsilon - u)u^{-1}.$$

De (26) on déduit

$$(30)\quad \square\, \underset{\varepsilon\to+0}{\mathrm{Pf}}\, Y(u - \varepsilon)\,u^{\lambda} = \lambda(2n - 4 + 4\lambda)\, \underset{\varepsilon\to+0}{\mathrm{Pf}}\, Y(u - \varepsilon)\,u^{\lambda-1} + \underset{\varepsilon\to+0}{\mathrm{Pf}}\,[(2n - 4 + 4\lambda)\,\varepsilon^{\lambda}H_{\varepsilon} + 4\varepsilon^{\lambda+1}H_{\varepsilon}^{1}].$$

Sauf pour certaines valeurs exceptionnelles de λ, le second terme au second membre de (30) s'annule, et cette relation peut alors s'écrire

$$(31)\quad \square\, \underset{\varepsilon\to+0}{\mathrm{Pf}}\, Y(u-\varepsilon)u^{\lambda} = 4\,\frac{\Gamma(\lambda+1)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\lambda\right)}{\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\frac{n}{2}+\lambda-1\right)}\, \underset{\varepsilon\to+0}{\mathrm{Pf}}\, Y(u-\varepsilon)u^{\lambda-1}.$$

Dans le 1er cas, en l'utilisant pour les valeurs

$$-\frac{1}{2},\qquad -\frac{3}{2},\qquad \ldots,\qquad -\frac{n-4}{2}$$

de λ, dont aucune n'est exceptionnelle, on obtient

$$\square^{\frac{n-3}{2}}\, Y(u)\,u^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{n-3}{2}}\, \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{4-n}{2}\right)}\, T_1,$$

ce qui peut aussi s'écrire (en tenant compte de la relation des compléments et de la relation de LEGENDRE) :

$$\square^{\frac{n-3}{2}}\, Y(u)\,u^{-\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{n+1}{2}}\,\Gamma(n - 2)T_1.$$

On a donc :

$$(32)\qquad T_1 = \frac{(-1)^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma(n-2)}\,\square^{\frac{n-3}{2}}\, Y(u)\,u^{-\frac{1}{2}}.$$

D'une manière tout à fait analogue, on obtient encore dans le 1^er^ cas :

$$(33)\qquad T_2 = \frac{1}{\Gamma(n-2)} \square^{\frac{n-3}{2}} Y(-u)|u|^{-\frac{1}{2}}.$$

Supposons maintenant que λ est un entier et posons

$$U^\lambda = \operatorname*{Pf}_{\varepsilon \to +0} Y(u-\varepsilon)u^\lambda + \operatorname*{Pf}_{\varepsilon \to -0} Y(\varepsilon - u)u^\lambda.$$

Remarquons que, dans (28) et (29), on peut remplacer $|u|$ par $-u$ et $|\varepsilon|$ par $-\varepsilon$. On déduit alors de (26) et (28) :

$$(34)\qquad \begin{aligned} \square U^\lambda &= \lambda(2n-4+4\lambda)U^{\lambda-1} \\ &\quad + \left(\operatorname*{Pf}_{\varepsilon \to +0} - \operatorname*{Pf}_{\varepsilon \to -0}\right)[(2n-4+4\lambda)\varepsilon^\lambda H_\varepsilon + 4\varepsilon^{\lambda+1}H_\varepsilon^1], \end{aligned}$$

et de (27) et (29) :

$$(35)\qquad \square \log|u| = (2n-4)U^{-1}$$

Dans le 2^e^ cas et dans le 3^e^ cas, le second terme au second membre de (34) s'annule si λ est un entier $\geqslant \frac{4-n}{2}$, et cette relation peut alors s'écrire :

$$(36)\qquad \square U^\lambda = -4 \frac{\Gamma(1-\lambda)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(-\lambda)\,\Gamma\left(\lambda+\frac{n-2}{2}\right)} U^{\lambda-1}.$$

En utilisant (35) et (36) pour $\lambda = -1, -2, \ldots, \frac{4-n}{2}$ et remarquant que, dans les cas envisagés où n est pair, $T_1 = U^{\frac{2-n}{2}}$, il vient

$$\square^{\frac{n-2}{2}} \log|u| = (-4)^{\frac{n-4}{2}} (2n-4)\, \Gamma^2\left(\frac{n-2}{2}\right) T_1,$$

d'où l'on tire

$$(37)\qquad T_1 = (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{2^{2-n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \square^{\frac{n-2}{2}} \log|u|.$$

D'autre part, pour $\lambda = 0$, la relation (30) donne

$$\square Y(u) = (2n-4)A_0,$$

et de la relation (13), qui est valable dans les cas envisagés pour $h < \frac{n-4}{2}$, on déduit :

$$\square^{\frac{n-4}{2}} A_0 = (-1)^{\frac{n}{2}} 2^{n-4} \Gamma^2\left(\frac{n-2}{2}\right) A_{\frac{n-4}{2}}.$$

Comme

$$A_{\frac{n-4}{2}} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} T_2,$$

cela entraîne

$$\square^{\frac{n-2}{2}} Y(u) = 2^{n-2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) T_2,$$

d'où finalement :

$$T_2 = \frac{2^{2-n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \square^{\frac{n-2}{2}} Y(u). \tag{38}$$

Les relations (32) et (33) pour le 1^er^ cas (n impair) et les relations (37) et (38) pour le 2^e^ et le 3^e^ cas (n pair) donnent les représentations de T_1 et T_2 que nous avions en vue.

Pour terminer, je mentionnerai encore les formules suivantes, conséquences immédiates des résultats obtenus [6].

Dans le 1^er^ cas, on a

$$\square^{\frac{n-1}{2}} Y(u) u^{-\frac{1}{2}} = C_1 \delta_O, \qquad \square^{\frac{n-1}{2}} Y(-u)|u|^{-\frac{1}{2}} = 0;$$

dans le 2^e^ cas, on a

$$\square^{\frac{n}{2}} \log|u| = C_2 \delta_O, \qquad \square^{\frac{n}{2}} Y(u) = 0;$$

[6] J'ai communiqué ces formules à M. HARISH CHANDRA en novembre 1954, en réponse à une question qu'il m'avait posée au Colloque Henri POINCARÉ, et il les a reproduites dans : *American Journal of Mathematics*, vol. 79, 1957, p. 248; mais les valeurs de certains facteurs numériques y sont inexactes. M. HARISH CHANDRA vient de me communiquer (février 1959) qu'il a retrouvé ces mêmes formules par une autre méthode, avec les mêmes valeurs des facteurs numériques que celles données ici. Une autre manière d'obtenir et de représenter la solution élémentaire de l'opérateur $\square$ a été indiquée par M^me^ FOURÈS-BRUHAT : *solution élémentaire d'équations ultra-hyperboliques*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, tome 35, 1956, p. 277-288.

dans le 3e cas, on a

$$\square^{\frac{n}{2}} \log |u| = 0, \qquad \square^{\frac{n}{2}} Y(u) = C_3 \delta_O;$$

les valeurs des facteurs numériques C_1, C_2 et C_3 étant

$$C_1 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} 2^{n-1} \pi^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right),$$

$$C_2 = (-1)^{\frac{p}{2}+1} 2^n \pi^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

$$C_3 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} 2^n \pi^{\frac{n-2}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

SUR LA TRANSFORMATION DE MELLIN ET LES FONCTIONS A DOMINANTE ANGULAIRE ALGÉBRICO-LOGARITHMIQUE EN UN POINT

par Maurice BLAMBERT.

INTRODUCTION

Dans ce mémoire je me propose de mettre en évidence l'intérêt du choix convenable d'une fonctionnelle pour l'étude d'une certaine classe de points singuliers de fonctions analytiques. Cette classe est celle des points dont je conviens de dire (sous des conditions que je précise) que la fonction analytique considérée ayant un point de cette classe pour point singulier possède en ce point une « dominante angulaire algébrico-logarithmique »; elle contient la sous-classe des points algébrico-logarithmiques rencontrés dans l'étude des solutions analytiques des équations différentielles linéaires homogènes du type de Fuchs. (Ces derniers ont fait l'objet de nombreux travaux dans des directions diverses.)

Je montre que l'application convenable de la transformation de Mellin (l'intégrale de Mellin étant calculée de long d'un rayon issu du point singulier du type cité) à une fonction déterminante possédant ce type de points singuliers lui fait correspondre une fonction génératrice dont on peut caractériser l'ensemble singulier. Dans des cas intéressants, par exemple celui de l'existence de points algébrico-logarithmiques, la transformée de Mellin a un ensemble singulier constitué par des pôles régulièrement espacés. Lorsque l'origine du rayon d'intégration de l'intégrale de Mellin est un point régulier

pour la fonction alors sous une condition de croissance la transformée est entière et est d'ordre à la Ritt nul dans chaque demi-bande horizontale gauche de son plan. Je retrouve comme cas particuliers des résultats anciens dus à G.H. Hardy, M. Fekete, M.L. Cartwright. Les résultats obtenus montrent qu'au lieu de caractériser un point singulier par le comportement de la fonction au voisinage de ce point il est plus intéressant dans certains types de problèmes de le caractériser par la donnée de l'ensemble singulier de la transformée à l'aide d'une fonctionnelle convenablement choisie.

Dans un premier chapitre je rappelle des définitions et des locutions et même des résultats déjà utilisés dans d'autres mémoires et j'introduis des définitions nouvelles. Au chapitre II j'étudie la nature de la transformée de Mellin, son ensemble singulier, et dans le cas particulier où elle est entière son ordre au sens de Ritt dans une demi-bande. Le chapitre III est réservé à l'étude de quelques propriétés d'inversion de la transformation. Le chapitre IV est consacré à l'application des résultats des chapitres II et III au problème de la composition (au sens Hadamard-Mandelbrojt) des singularités des séries de Dirichlet générales. Je précise que je ne me suis pas proposé de faire dans ce dernier chapitre une étude systématique de ce sujet. Les théorèmes énoncés ont pour but de mettre en évidence l'intérêt des résultats antérieurs dans ce problème. En effet l'étude de la composition des points singuliers au voisinage desquels les fonctions ne sont pas uniformes est en général plus difficile que celle des points où les fonctions sont uniformes. Ici on montre comment on peut apporter une solution à ce problème pour une certaine classe de points en se ramenant à la composition de points singuliers de fonctions uniformes. Les conditions et les énoncés des théorèmes du chapitre IV ont été choisis simples à dessein à la fois pour illustrer plus facilement la méthode et éviter d'allonger le texte. Ultérieurement dans un autre mémoire je reprendrai l'étude systématique de ce problème dans cette voie. Une bibliographie très succincte termine ce travail.

CHAPITRE PREMIER

On considère les deux séries $f(s) = \sum_1^\infty a_n e^{-s\lambda_n}$ avec $0 < \lambda_n \uparrow \infty$ et $\varphi(s) = \sum_1^\infty b_n e^{-s\mu_n}$ avec $0 < \mu_n \uparrow \infty$, $s = \sigma + i\tau$. On note σ_C^f, σ_C^φ et σ_A^f, σ_A^φ respectivement leurs abscisses de convergence simple et absolue. Soit n_0 le plus petit entier positif tel que $\mu_n > \lambda_1$ dès que $n \geqslant n_0$, et soit k un entier positif. Le nombre que l'on note $a_{\mu_n}^{(k)}$ est défini de la manière suivante : il est égal à 0 pour $1 \leqslant n < n_0$ (si $n_0 > 1$) et à

$$\sum_{\substack{m \\ (\lambda_m < \mu_n)}} (\mu_n - \lambda_m)^k a_m \qquad \text{pour} \qquad n \geqslant n_0.$$

Ce nombre $a_{\mu_n}^{(k)}$ est appelé le $n^{\text{ième}}$ coefficient d'ordre k, par rapport à la suite $\{\mu_n\}$, de la fonction $f(s)$ définie par prolongement analytique de la somme de la série $\sum a_n e^{-s\lambda_n}$. Si la suite $\{\mu_n\}$ est identique à la suite $\{n\}$ le nombre,

$$\sum_{(\lambda_m < n)} (n - \lambda_m)^k a_m$$

est appelé le $n^{\text{ième}}$ coefficient « taylorien » d'ordre k de la fonction $f(s)$. J'appelle opérateur Hadamard-Mandelbrojt celui qui fait correspondre la série composée $\sum a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-s\mu_n}$ au couple des deux séries composantes, $\sum a_n e^{-s\lambda_n}$ et $\sum b_n e^{-s\mu_n}$; la fonction définie par prolongement analytique de la somme de la série composée, à partir de son demi-plan de convergence, est notée $H_k[f, \varphi/s]$.

Soit σ_1 un certain nombre réel (fini) et soit Δ un domaine (ensemble connexe de points tous intérieurs) situé dans le demi-plan $\sigma > \sigma_1$ et tel que :

a) Δ contient des points s tels que $Rs = \sigma > \sigma_A^f$,

b) la fonction $f(s)$ est holomorphe dans Δ et égale à la

somme de la série $\Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$ pour chaque $s \in (\Delta \cap P_C^f)$, où P_C^f est le demi-plan $\sigma > \sigma_C^f$.

Soit $\Delta(\sigma_1)$, un domaine, le plus grand s'il existe, union de domaines Δ et qui est tel que la fonction $f(s)$ est holomorphe dans $\Delta(\sigma_1)$ et égale à la somme de sa série de définition pour chaque s du demi-plan P_C^f. L'ensemble constitué par tous les points du demi-plan $\sigma \geqslant \sigma_1$ qui n'appartiennent pas à l'ensemble $\Delta(\sigma_1)$ est noté $\mathbb{S}_f^{\sigma_1}$ et est appelé « l'ensemble singulier de $f(s)$ par rapport au demi-plan $\sigma > \sigma_1$ ». Cet ensemble $\mathbb{S}_f^{\sigma_1}$ est fermé ; il contient les points de la droite $\sigma = \sigma_1$. On remarquera que les propriétés qui caractérisent $\Delta(\sigma_1)$ entraînent que tout point $\alpha \in \mathbb{S}_f^{\sigma_1}$ avec $R\alpha > \sigma_1$ au voisinage duquel la fonction $f(s)$ n'est pas uniforme ne peut être point isolé dans l'ensemble $\mathbb{S}_f^{\sigma_1}$. La fonction $f(s)$ ne peut être prolongée analytiquement jusqu'à un point de $\mathbb{S}_f^{\sigma_1}$ le long d'un chemin contenu dans $\sigma > \sigma_1$. La branche principale de $f(s)$ est holomorphe dans $\underset{\overline{P}_f}{\complement}\, \mathbb{S}_f^{\sigma_1}$, où P_f et $\overline{P}_f$ sont respectivement les demi-plans $\sigma > \sigma$ et $\sigma \geqslant \sigma_1$.

Dire que les points d'un ensemble fermé $\mathbb{S}$ sont les seuls points singuliers « possibles » par rapport à un demi-plan $P_f(\sigma > \sigma_1)$ d'une fonction $f(s)$ définie par prolongement analytique de la somme de la série $\Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$, avec $\sigma_C^f < \infty$, signifie que dans chaque domaine Δ (dont l'intersection avec le demi-plan $\sigma > \sigma_C^f$ est non vide) appartenant au complémentaire par rapport à $\overline{P}_f$ de l'intersection de $\mathbb{S}$ et $\overline{P}_f$:

1) $f(s)$ est holomorphe,

2) $f(s) = \Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$ pour chaque s avec $\sigma > \sigma_C^f$.

Eu égard à cette définition il est évident que les points de $\mathbb{S}_f^{\sigma_1}$ sont les seuls points singuliers « possibles » de $f(s)$ [ou encore de la branche principale de $f(s)$] par rapport à P_f. On remarquera que si $\alpha \in \mathbb{S}_f^{\sigma_1}$, α n'est pas nécessairement un point singulier (au sens classique) pour la fonction $f(s)$.

On définit de la manière suivante « l'ordre généralisé » de la fonction $f(s)$ dans P_f ou, plus succinctement, « l'ordre O_M » de $f(s)$ dans P_f :

On pose $\mathbb{S}_f^{\sigma_1}(\varepsilon) = \cup\, c(s, \varepsilon)$ pour chaque $s \in \mathbb{S}_f^{\sigma_1}$, où $c(s, \varepsilon)$ est le cercle ouvert de centre s et de rayon ε. S'il existe un nombre $\nu \geqslant 0$ tel que :

1) à tout couple $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ il correspond un couple de

constantes $C = C(\varepsilon, \eta)$ et $T_0 = T_0(\varepsilon, \eta)$ tels que $|f(s)| < C|\tau|^{\nu+\eta}$ pour tout point à distance finie $s \in \complement_{P_f}\left(\overline{P}_f \cap \mathbf{S}_f^{\sigma_1}(\varepsilon)\right)$ avec $|\tau|$ suffisamment grand, $|\tau| > T_0$,

2) aucun nombre $\nu' < \nu$ ne possède la propriété (1),

alors on dit que $f(s)$ est « d'ordre O_M » égal à ν dans P_f.

Si $\nu = 0$, la condition (2) est sans objet. On sait que la somme d'une série de Dirichlet est de la forme : $\Sigma a_n e^{-s\lambda_n} = o(|\tau|)$ pour $|\tau| \uparrow \infty$, $\sigma_0 + i\tau = s$, σ_0 (fixé fini quelconque) $> \sigma_C^f$, (ce résultat peut-être amélioré, par exemple en particularisant la suite $\{\lambda_n\}$) et ne peut pas être de la forme

$$\Sigma a_n e^{-s\lambda_n} = 0(|\tau|^{\mu}), \qquad \text{avec} \qquad \mu < 0, \qquad \text{pour} \qquad |\tau| \uparrow \infty,$$

de même qu'elle ne peut tendre vers une limite finie lorsque le point s s'éloigne à l'infini en décrivant une parallèle à l'axe de convergence dans le demi-plan de convergence. Il est évident que si la série définissant $f(s)$ est une série de Taylor-D, c'est-à-dire telle que $\{\lambda_n\} \equiv \{n\}$, alors dans le complémentaire par rapport à $\overline{P}_f$ de l'intersection de $\mathbf{S}_f^{\sigma_1}(\varepsilon)$ et de $\overline{P}_f$ on a $f(s) = 0(1)$.

Posons $\sigma_{\mathcal{H}}^f(\sigma_1) = \overline{\text{Borne}}\ \sigma$, $s \in \mathbf{S}_f^{\sigma_1}$. Le nombre $\sigma_{\mathcal{H}}^f(\sigma_1)$ est appelé l'abscisse d'holomorphie de $f(s)$ par rapport à P_f.

Posons $\sigma_{\mathcal{H}}^f = \underline{Borne}\ \sigma'$, $f(s)$ étant holomorphe dans $\sigma > \sigma'$, (et égale à la somme de sa série de définition dans $\sigma > \sigma_C^f$). Le nombre $\sigma_{\mathcal{H}}^f$ est l'abscisse d'holomorphie au sens classique. Si $\sigma_1 < \sigma_{\mathcal{H}}^f$ on a $\sigma_{\mathcal{H}}^f = \sigma_{\mathcal{H}}^f(\sigma_1)$; si $\sigma_1 \geqslant \sigma_{\mathcal{H}}^f$, on a alors $\sigma_{\mathcal{H}}^f(\sigma_1) = \sigma_1$.

E_1 et E_2 étant des ensembles de nombres complexes, on appelle « somme composée » de ces deux ensembles l'ensemble formé de tous les nombres $\alpha + \beta$, avec $\alpha \in E_1$, $\beta \in E_2$.

S. Mandelbrojt a énoncé les théorèmes suivants [IV. 1] :

Théorème A. — *Soit $f(s) = \Sigma\, a_n e^{-s\lambda_n}$, avec $\sigma_A^f < \infty$, « d'ordre, O_M » égal à ν dans $P_f(\sigma > \sigma_1)$; soit $\varphi(s) = \Sigma\, b_n e^{-s\mu_n}$, avec $\sigma_A^\varphi < \infty$ « d'ordre O_M » égal à μ dans $P_\varphi(\sigma > \sigma_2)$. Soient $\mathbf{S}_f^{\sigma_1}$ l'ensemble singulier de $f(s)$ par rapport à P_f et $\mathbf{S}_\varphi^{\sigma_2}$ celui de $\varphi(s)$ par rapport à P_φ. Si k (entier) $> \nu + \mu$, la série $\Sigma a_{\mu_n}^{(k)}\, b_n e^{-s\mu_n}$ a une abscise de convergence absolue au plus égale à max $(\sigma_A^\varphi, \sigma_A^f + \sigma_A^\varphi)$ et la fonction $H_k[f, \varphi|s]$ a pour seuls points singuliers « possibles » par rapport au demi-plan $\sigma > \sigma_2 + \max[o, \sigma_{\mathcal{H}}^f(\sigma_1)]$ les points de l'ensemble $\mathbf{S}_\varphi^{\sigma_2} \cup \overline{\mathbf{S}}_{f\varphi}^{\sigma_1\sigma_2}$.*

Théorème B. — *Dans les mêmes conditions qu'au théorème* A *et si* $s = 0$ *est point régulier pour* $f(s)$, *alors les seuls points singuliers « possibles » par rapport à* $\sigma > \sigma_2 + \sigma^f_{\mathcal{H}}(\sigma_1)$ *de la fonction* $\mathrm{H}_k[f, \varphi|s] - \mathrm{I}_k(s)$, *avec* $\mathrm{I}_k(s) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \mathrm{C}_k^j f^{(k-j)}_{(0)} \varphi^{(j)}_{(s)}$ *sont les points de l'ensemble* $\overline{\mathbb{S}^{\sigma_1\sigma_2}_{f\ \varphi}}$ *(fermeture de l'ensemble composé des ensembles* $\mathbb{S}^{\sigma_1}_f$ *et* $\mathbb{S}^{\sigma_2}_{\varphi}$*).*

On rappelle succinctement que :

On pave la bande $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant c$ (où la constante $c > \max(o, \sigma^f_{\mathrm{A}})$) avec des carrés de côté $\varepsilon = \dfrac{c - \sigma_1}{q}$, q entier, et on note $\mathrm{D}(\varepsilon)$ la fermeture de l'ensemble formé de tous les carrés qui ne contiennent dans leur fermeture ni un point de $\mathrm{S}^{\sigma_1}_f$, ni le point $s = 0$, et qui ne sont pas contigüs à des carrés ne possédant pas cette propriété. On note $\mathrm{D}'(\varepsilon)$ la plus grande région appartenant à $\mathrm{D}(\varepsilon)$ et contenant les carrés bordant la droite $\sigma = \mathrm{c}$, (ceci suppose d'avoir choisi l'entier q suffisamment grand), et soit $\mathrm{C}_f(\varepsilon)$ la partie de la frontière de $\mathrm{D}'(\varepsilon)$ qui ne contient pas la droite $\sigma = c$. Les deux intégrales

$$\frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{1+k}}$$

et

$$\frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}_f(\varepsilon)} f(s)\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{1+k}}$$

(la seconde intégrale étendue à $\mathrm{C}_f(\varepsilon)$ est prise dans le sens indirect habituel par rapport à $\mathrm{D}'(\varepsilon)$) définissent, par prolongement analytique à partir d'un demi-plan convenable du plan de la variable z, la même fonction $\mathrm{H}_k[f, \varphi|z]$ que la somme de la série du théorème A.

Définition I. 1. — La fonction analytique $f(s)$, définie par le prolongement analytique de la somme de la série

$$\Sigma a_n e^{-s\lambda_n}, \qquad 0 < \lambda_n \uparrow \infty, \qquad a_n \neq 0,$$

à partir de son demi-plan de convergence $\mathrm{R}s = \sigma > \sigma^f_{\mathrm{C}}$, est dite une fonction de classe $\mathfrak{M}$, $(f \in \mathfrak{M})$, si elle satisfait aux conditions suivantes :

1) $\sigma^f_{\mathcal{H}} = 0$;

2) il existe $\sigma_1 < 0$ tel que $f(s)$ est « d'ordre O_M » fini (égal à ν) dans le demi-plan $\sigma > \sigma_1$;

3) la série $f^*(s) = \sum a_n e^{-s\lambda_n^*}$, avec $\lambda_n^* = \operatorname{Log} \lambda_n$, admet $\sigma_A^{f^*} < \infty$;

4) il existe une constante σ_1^*, avec $\sigma_1^* < \sigma_{\mathcal{H}}^{f^*}$, telle que la fonction $f^*(s)$ est « d'ordre O_M » fini (égal à ν^*) dans le demi-plan $\sigma > \sigma_1^*$. (On suppose, évidemment, que $\sigma_{\mathcal{H}}^{f^*}$ est fini c'est-à-dire que $f^*(s)$ ne se réduit pas à une fonction entière.)

On remarquera que la condition (4) entraîne que si $f^*(s)$ est entière la condition subsite en abandonnant l'inégalité.

$$\lambda_n^* = \operatorname{Log} \lambda_n \geqslant 0,$$

c'est-à-dire $\lambda_n \geqslant 1$ pour $n \geqslant 1$. En effet, sinon il existerait un certain entier $n_0 \geqslant 1$ tel que $\lambda_n^* < 0$ pour $1 \leqslant n \leqslant n_0$ et $\lambda_n^* \geqslant 0$ pour $n > n_0$. On aurait

$$f^*(s) = e^{-s\lambda_1^*}\{a_1 + f_0^*(s)\}, \qquad \text{avec} \qquad f_0^*(s) = \sum_2^\infty a_n e^{-s(\lambda_n^* - \lambda_1^*)}$$

et $\lambda_n^* - \lambda_1^* > 0$ pour $n \geqslant 2$, $\sigma_A^{f_0^*} < \infty$. Il en résulterait $f_0^*(s) = o(1)$ pour $\sigma \uparrow \infty$ et donc $|f^*(s)| \to \infty$ lorsque $\sigma \uparrow \infty$ sur toute droite $\tau = \tau_0$. La fonction $f^*(s)$ ne pourrait pas être « d'ordre O_M » fini dans un demi-plan.

Il est évident que la classe $\mathfrak{M}$ est non vide. Une telle assertion est triviale comme le montre l'exemple suivant :

$$T(s) = \sum_1^\infty e^{-ns}, \qquad \sigma > 0,$$

$$T^*(s) \equiv \zeta(s) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^s}, \qquad \sigma > 0,$$

ou $\sigma_A^T = 0$, $\sigma_A^\zeta = 1$; l'ensemble singulier $\mathfrak{S}_T^{\sigma_1}$ de la fonction $T(s)$ par rapport à un demi-plan $\sigma > \sigma_1$, avec $\sigma_1 < 0$, se réduit à l'axe $\sigma = \sigma_1$ et aux points d'affixes $2n\pi i$ (n entier positif, négatif ou nul). Cette fonction est bornée en module dans ce demi-plan à l'extérieur des cercles de rayon $\varepsilon > 0$ ayant ces points pour centres. La fonction $\zeta(s)$ est, comme on sait, de la forme $\zeta(s) = O(|\tau|)$ pour $|\tau| \uparrow \infty$, $\sigma \geqslant 1/2$, et de la forme $O(1)$ dans chaque demi-plan $\sigma > 1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Plus précisément on sait que si l'hypothèse de Riemann sur la répartition des zéros complexes est vraie alors $\zeta(\sigma + i\tau) = O(\tau^\varepsilon)$, $\tau \uparrow \infty$, pour chaque $\varepsilon > 0$ et $\sigma \geqslant 1/2$; cette propriété est connue sous le nom d'hypothèse de Lindelöf.

Définition I. 2. — On dit qu'une fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans un angle Σ de sommet z_0, d'ouverture $\eta > 0$ et d'axe de symétrie $\arg(z - z_0) = \theta_0$, où θ_0 est une constante réelle, admet dans Σ au point z_0 une « dominante angulaire algébrico-logarithmique » si pour $z \in \Sigma$ avec $|z - z_0| \downarrow 0$ elle a la représentation :

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \psi(z)$$

où :

1) $\varphi_0(z)$ et $\psi(z)$ sont deux fonctions holomorphes dans Σ;

2) $\psi(z)$ est (par prolongement analytique dans Σ) dans un voisinage circulaire $c(z_0, \rho)$, de centre z_0 et de rayon $\rho > 0$, de la forme

$$\psi(z) = \sum_{r=0}^{r_0} (z - z_0)^{-q_r} \{\operatorname{Log}(z - z_0)\}^{p_r - 1} \psi_r(z),$$

où chaque fonction $\psi_r(z)$ est holomorphe dans $c(z_0, \rho)$ avec $\psi_r(z_0) \neq 0$; les constantes q_r et p_r pouvant être complexes.

On précise que sous la locution « par prolongement analytique dans Σ... » on entend : puisque la fonction $\psi(z)$ est d'après (1) holomorphe dans Σ et considérant en un point z_1 intérieur à Σ (donc $|z_1 - z_0| > 0$) l'élément taylorien dont $\psi(z)$ est la somme dans un cercle (de rayon convenable non nul et de centre z_1) si on prolonge cet élément, le long de tout arc (rectifiable par exemple pour fixer les idées) intérieur à Σ on peut toujours atteindre un point z_2 intérieur à l'intersection de Σ et de $c(z_0, \rho)$, $\rho > 0$, tel que par prolongement dans $c(z_0, \rho)$ à partir du point z_2 la fonction $\psi(z)$ a la représentation indiquée;

3) la fonction $\varphi_0(z)$ étant holomorphe au point z_0 par prolongement analytique dans Σ (dans un domaine union de l'angle Σ et d'un cercle ouvert non vide de centre z_0 donc de rayon positif) ou bien z_0 est singulier pour le prolongement analytique de $\varphi_0(z)$ dans Σ auquel cas on suppose que $\varphi_0(z) = 0(|z - z_0|^{-\alpha})$ lorsque $|z - z_0| \downarrow 0$ pour $z \in \Sigma$, avec $\alpha < \min Rq_r$, $0 \leqslant r \leqslant r_0$.

Définition I. 3. — La fonction

$$(z - z_0)^{-q_r} \{\operatorname{Log}(z - z_0)\}^{p_r - 1} \psi_r(z)$$

est appelée un élément singulier de la fonction « dominante », attaché au point z_0 et de type $(q_r, p_r - 1)$.

DÉFINITION I. 4. — La fonction $\psi(z)$ somme finie d'éléments de types respectifs $(q_r, p_r - 1)$, $0 \leqslant r \leqslant r_0$, au point z_0, est appelée la « dominante angulaire algébrico-logarithmique » de $\varphi(z)$ dans Σ au point z_0.

DÉFINITION I. 5. — Le nombre $-\alpha$ est appelé l'ordre au point z_0 de la fonction « dominée » dans Σ.

On rappelle (d'après R. Jungen) [III. 1] que :

Le poids (si p_r est entier $\geqslant 1$) de l'élément singulier de type $(q_r, p_r - 1)$ est un complexe de deux nombres réels, défini comme suit :

$$
\begin{array}{llll}
\cdot[q'_r, p_r - 1] & \text{si} & q_r \neq 0, -1, -2, -3, \ldots, & \text{avec } q'_r = \mathrm{R}q_r. \\
\cdot[q_r, p_r - 2] & \text{si} & q_r = 0, -1, -2, -3, \ldots, & p_r > 1. \\
\cdot[-\infty, 0] & \text{si} & q_r = 0, -1, -2, -3, \ldots, & p_r = 1.
\end{array}
$$

On remarquera que si $p_r = 1$ et si q_r est un entier négatif ou 0, alors z_0 est point régulier pour l'élément considéré de $\psi(z)$; en d'autres termes, dire que z_0 est pour l'élément considéré de type $(q_r, 0)$ et de poids $[-\infty, 0]$, c'est affirmer que z_0 est point régulier pour cet élément. Les poids des éléments singulier de la « dominante » $\psi(z)$ du point z_0 sont ordonnés comme suit :

$$\cdot[q'_r, p_r - 1] \qquad \text{est dit plus « lourd » que} \qquad [q'_{r'}, p_{r'} - 1]$$

si $q'_r > q'_{r'}$, ou si $q'_r = q'_{r'}$ et $p_r > p_{r'}$.

On appelle poids du point z_0 pour la « dominante » $\psi(z)$ le poids de l'élément singulier le plus lourd de cette « dominante ».

On remarquera que la « dominante » peut ne pas posséder un élément plus lourd que tous les autres c'est-à-dire qu'il peut exister au moins deux éléments de même poids et « plus lourds » que les autres ; il peut arriver que les éléments de la dominante soient tous de même poids. On convient encore d'appeler poids du point z_0 pour la « dominante » le poids commun de ses éléments les plus « lourds ».

On remarquera que, si au point z_0, on considère un élément singulier du type $(q_r, p_r - 1)$ il est superflu d'y considérer des éléments des types $(q_r - n, p_r - 1)$, n entier positif.

Dans le cas d'une série de Dirichlet générale les définitions peuvent s'énoncer en particularisant comme suit :

On dit qu'une fonction $\varphi(s)$ admet en un point singulier s_0, situé sur son axe d'holomorphie $\sigma = \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$ (et donc $\sigma_0 = \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi}$), dans un angle ouvert Σ de sommet s_0 et d'ouverture $\eta > 0$, avec $\Sigma \subset P_{\mathcal{H}}^{\varphi}$ (où $P_{\mathcal{H}}^{\varphi}$ est le demi-plan d'holomorphie de $\varphi(s)$) une « dominante angulaire algébrico-logarithmique » si pour $s \in \Sigma$ avec $|s - s_0| \downarrow 0$ elle a la représentation :

$$\varphi(s) = \varphi_0(s) + \psi(s),$$

où... (tout le reste de la définition antérieure et celles qui la suivent étant légitimes mot pour mot).

Définition I. 6. — On appelle transformée de Mellin de la fonction $\varphi(z)$ suivant le rayon $\arg(z - z_0) = \theta_0$, la fonction analytique de la variable complexe s définie par le prolongement analytique de l'intégrale convergente

$$\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \varphi(z)(z - z_0)^{s-1}\, dz, \quad \text{avec} \quad z - z_0 = \rho e^{i\theta_0},$$

à partir dans le plan de la variable s d'un domaine non vide, s'il existe, de convergence absolue de cette intégrale.

On note $M\{\varphi;\, z_0,\, \theta_0 | s\}$ cette transformée.

Contrairement à l'habitude (outre le fait de ne pas se limiter à l'intégration sur le rayon $\arg z = 0$, avec $z_0 = 0$) on a fait figurer en coefficient la fonction entière $\frac{1}{\Gamma(s)}$ dont la présence a pour avantage que, sous des conditions convenables, la transformée de Mellin d'une série de Dirichlet de type $\{\lambda_n\}$ est une série de Dirichlet de type $\{\lambda_n^*\}$, avec $\lambda_n^* = \operatorname{Log} \lambda_n$.

Définition I. 7. — On considère un angle Σ appartenant au demi-plan $Rz = x > x_0$ d'axe $\arg(z - z_0) = \theta_0$, ensemble des points z avec $|z - z_0| > 0$, $|\arg(z - z_0) - \theta_0| < \eta$, $\eta > 0$; l'angle Σ ainsi défini est tel que tout $z \in \Sigma$ de module fini est intérieur à Σ. On dit que le point z_0 est quasi-régulier pour la fonction $f(z)$ holomorphe dans Σ s'il existe un rayon $\arg(z - z_0) = \theta_1$ intérieur à Σ tel que la transformée de Mellin de $f(z)$ le long de ce rayon, $M\{f;\, z_0,\, \theta_1 | s\}$, est une fonction entière.

On constate facilement que si la série $f^*(s) = \Sigma a_n e^{-s\lambda_n^*}$,

avec $\lambda_n^* = \operatorname{Log} \lambda_n$ et $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, admet $\sigma_A^{f^*} < \infty$, alors la série $f(s) = \Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$ admet $\sigma_A^f \leqslant 0$. On sait que la relation,

$$f^*(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty f(x) x^{s-1} \, dx$$

où l'intégrale est calculée sur le demi-axe réel $x > 0$, est légitime avec le choix s tel que $\sigma > \max(0, \sigma_A^{f^*})$.

On peut alors énoncer en particularisant I. 7 au cas des séries de Dirichlet :

Définition I. 8. — Si la série $f^*(s) = \Sigma a_n e^{-s\lambda_n^*}$, avec $\lambda_n^* = \operatorname{Log} \lambda_n$ et $0 < \lambda_n \uparrow \infty$, admet $\sigma_A^{f^*} < \infty$, alors le point $s = 0$ est dit « quasi-régulier » pour la fonction $f(s)$ prolongement analytique de la somme de la série $\Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$, si la fonction $f^*(s)$ prolongement analytique de la somme de la série de type $\{\lambda_n^*\}$ est une fonction entière.

Ici l'angle Σ est tout angle, de sommet $z = 0$, ensemble des points z avec $|\arg z| < \theta < \pi/2$ et $M\{f; z_0, \theta_1 | s\} \equiv M\{f; 0, 0 | s\}$.

Remarque. — Si le point $s = 0$ est quasi-régulier pour une fonction $f(s)$ il n'est pas nécessairement régulier pour cette fonction. L'exemple suivant le prouve. On considère la fonction :

$$f(s) = \sum_{n \geqslant 3} e^{-\alpha \mathrm{L}n . \mathrm{L}_2 n} . e^{-sn},$$

où $\mathrm{L}_2 n \equiv \operatorname{Log} \operatorname{Log} n$ et où α est une constante positive. On constate facilement que $\sigma_c^f = \sigma_{\mathcal{H}}^f = 0$. Le point $s = 0$ est singulier pour $f(s)$. On a :

$$f^*(s) = \sum_{n \geqslant 3} e^{-\alpha \mathrm{L}n . \mathrm{L}_2 n} . e^{-s \mathrm{L}n}$$

et manifestement $\sigma_A^{f^*} = -\infty$. Le point $s = 0$ est donc singulier quasi-régulier pour $f(s)$.

On sait que J.F. Ritt a introduit pour les fonctions entières définies par des séries de Dirichlet une notion d'ordre distincte de la notion classique. On rappelle à ce sujet la définition suivante :

Soit $f(s) = \Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$, avec $\sigma_A^f = -\infty$; on pose :

$$M(\sigma) = \overline{\text{Borne}} |f(\sigma + i\tau)|, \qquad -\infty < \tau < \infty,$$

et on considère le nombre ρ défini par $\rho = \overline{\lim} \frac{L_2 M(\sigma)}{-\sigma}$, $\sigma \downarrow -\infty$.
ρ est par définition l'ordre au sens de Ritt de la fonction $f(s)$.

Entre autres propriétés cet auteur a établi le théorème suivant :

Si $f(s) = \Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$ *admet* $\sigma_\Lambda^f = -\infty$ *et si* $\underline{\lim} \frac{\lambda_n}{\operatorname{Log} n} > 0$ *alors une condition nécessaire et suffisante pour que* $f(s)$ *soit d'ordre (au sens de Ritt) égal à* ρ *est que :*

$$-\frac{1}{\rho} = \overline{\lim} \frac{\operatorname{Log}|a_n|}{\lambda_n \operatorname{Log} \lambda_n}, \qquad n \uparrow \infty,$$

$\left(\right.$avec $-\frac{1}{\rho} = -\infty$ si $\rho = 0$ et la remarque qui en résulte relativement à la limite).

Dans cet ordre d'idées j'ajoute les définitions suivantes :

Définition I. 9. — Une fonction $f(s)$ étant définie et non nulle sur la demi-droite $s = \sigma + i\tau_0$, $\sigma < \sigma_0$, j'appelle ordre semi-rectiligne au sens de Ritt de cette fonction $f(s)$ sur cette demi-droite le nombre

$$\rho = \overline{\lim} \frac{L_2 |f(s)|}{-\sigma}, \qquad \sigma \downarrow -\infty,$$

(ou plus succinctement ordre $(\underline{R})$ de $f(s)$ sur $s = \sigma + i\tau_0$).

Définition I. 10. — Si $f(s)$ est holomorphe sur la demi-bande $\mathcal{B}$ ensemble des points s avec $\sigma < \sigma_0$, $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, j'appelle ordre $(\underline{R})$ de $f(s)$ sur $\mathcal{B}$ le nombre

$$\rho = \overline{\lim} \frac{L_2 M(\sigma)}{-\sigma}, \qquad \sigma \downarrow -\infty,$$

où $M(\sigma) = \overline{\text{Borne}}\, |f(s)|$, pour $s = \sigma + i\tau$, avec $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$.

Dans chacune de ces définitions le symbole $L_2 \alpha$ (ou α est positif) est par convention 0 si $\alpha \leqslant 1$.

S. Mandelbrojt a introduit la notion d'ordre au sens de Ritt dans une bande pour une fonction entière somme d'une série de Dirichlet convergente dans le plan et a énoncé d'intéressantes propriétés.

Dans une note parue il y a déjà quelques années, j'ai introduit les notions de « type de l'ordre au sens de Ritt » dans le

plan et dans une bande horizontale du plan, et j'ai énoncé des propriétés relatives à ces notions telles que : expression du type τ de l'ordre ρ dans le plan au moyen des suites $\{a_n\}$ et $\{\lambda_n\}$, localisation des points singuliers d'une série donnée eu égard au type d'une série associée dont la somme est une fonction entière etc... Je ne ferai pas ici usage de ces résultats me réservant d'y revenir dans un travail ultérieur en les généralisant ainsi que ceux qui suivent au chapitre II, dans cet ordre d'idées.

CHAPITRE II

THÉORÈME II. 1. — *Dans les conditions :*

1) *il existe dans le plan de la variable complexe z un angle Σ de sommet z_0, d'ouverture $2\eta > 0$, et d'axe de symétrie* $\arg(z - z_0) = \theta_0$, *où θ_0 et η sont des constantes telles que* $|\theta_0 \pm \eta| < \pi/2$, *et il existe une constante $\mu > 0$ telle que la fonction* $\varphi(z) = O(e^{-x\mu})$ *pour $|z| \uparrow \infty$, lorsque $z \in \bar{\Sigma}$,*

2) *au point z_0 la fonction $\varphi(z)$ admet dans l'angle Σ une « dominante angulaire algébrico-logarithmique » formée des éléments des types $(q_r,\ p_r - 1)$, $0 \leqslant r \leqslant r_0$,*

3) *la fonction « dominée » au point z_0 dans Σ est d'ordre $-\alpha$,*

4) *on suppose* $\operatorname{Min} p'_r > 0$, $P'_r = R_{\rho_r}$, *alors la transformée de Mellin,* $M\{\varphi;\ z_0,\ \theta_1 | s\}$, *de la fonction $\varphi(z)$ suivant le rayon* $\arg(z - z_0) = \theta_1$ *avec $|\theta_1 - \theta_0| < \eta$ admet la représentation :*

$$M\{\varphi;\ z_0,\ \theta_1 | s\} = \sum_{r=0}^{r_0} \sum_{n=0}^{N_r} \frac{\gamma_n^r e^{i\theta_1(n+s-q_r)}}{\Gamma(s)} \{L_{n,r}(s) - E_{n,r}(s)\} + M_\alpha(s)$$

où

$$L_{n,r}(s) = e_{n,r}(s) + (-1)^{P_r - 1} \frac{\Gamma(p_r) e^{-i\theta_1(n+s-q_r)}}{(n + s - q_r)^{P_r}}$$

les fonctions $E_{n,r}(s)$, $e_{n,r}(s)$ étant entières; la fonction $M_\alpha(s)$ étant holomorphe dans le demi-plan $\sigma > \alpha$; N_r étant le plus grand entier positif (pouvant se réduire à 0) inférieur à $q'_r - \alpha$; les γ_n^r étant des constantes.

D'après la condition (2), on a pour $z \in \Sigma$ avec $|z - z_0| \downarrow 0$:

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \sum_{r=0}^{r_0} (z - z_0)^{-q_r} \{\operatorname{Log}(z - z_0)\}^{P_r - 1} \psi_r(z),$$

où chaque fonction $\psi_r(z)$ est holomorphe dans un cercle $c(z_0, \rho)$ avec $\rho > 0$ et où la fonction « dominée » $\varphi_0(z)$ est holomorphe dans Σ (on a par définition $\alpha < \min q'_r$). Soit une constante δ.

On suppose $0 < \delta < 1$ et on fixe $z_1 \in \Sigma$ avec $|z_1 - z_0| = \delta$. On pose $\arg(z_1 - z_0) = \theta_1$ et on a $|\theta_1 - \theta_0| < \eta$. L'intégrale calculée sur le rayon $\arg(z - z_0) = \theta_1$

$$\int_{0+}^{\delta} \varphi_0(z)(z - z_0)^{s-1}\, dz = \lim \int_{\varepsilon}^{\delta} \cdots \quad \text{pour} \quad 0 < \varepsilon \downarrow 0,$$

existe pour chaque s à distance finie dans le demi-plan $\sigma > \alpha$. Elle converge uniformément par rapport à s dans chaque domaine borné du demi-plan $\sigma \geqslant \alpha + \eta'$, $\eta' > 0$ arbitraire fixé, et est une fonction $\Phi(s)$ holomorphe dans le demi-plan $\sigma > \alpha$. Puisque $(z - z_0)^{\varepsilon}\{\operatorname{Log}(z - z_0)\}^{\nu} = o(1)$ pour $z \in \Sigma$ lorsque $|z - z_0| \downarrow 0$, où $\varepsilon > 0$ et ν sont des constantes, il est évident qu'un élément de type $(q_r, p_r - 1)$ est de la forme $o(|z - z_0|^{-q_r' - \varepsilon})$ pour $|z - z_0| \downarrow 0$ avec $z \in \Sigma$. Il en résulte que l'intégrale calculée sur le rayon $\arg(z - z_0) = \theta_1$:

$$\int_{0+}^{\delta} \psi(z)(z - z_0)^{s-1}\, dz = \lim \int_{\varepsilon}^{\delta} \cdots \quad \text{pour} \quad 0 < \varepsilon \downarrow 0,$$

existe pour chaque s à distance finie dans le demi-plan $\sigma > \operatorname{Max} q_r'$. Elle converge uniformément par rapport à s dans chaque domaine borné du demi-plan $\sigma \geqslant \eta' + \operatorname{Max} q_r'$, $\eta' > 0$ arbitraire fixé. On pose :

$$\theta(z) = \varphi(z) e^{z\mu}.$$

La fonction $\theta(z)$ est holomorphe et bornée supérieurement en module dans le complémentaire par rapport à l'angle Σ de l'intersection de cet angle et d'un cercle $c(z_0, \rho_0)$, avec $\rho_0 > 0$.

Pour $\arg(z - z_0) = \theta_1$ avec $|z - z_0| = \rho$ et posant $\rho = e^y$, $\delta' = \operatorname{Log} \delta$, $\Theta(y) = \theta(z)$, on a :

$$\int_{\delta}^{\infty} \varphi(z)(z - z_0)^{s-1}\, dz = e^{(is\theta_1 - z_0\mu)} \int_{\delta'}^{\infty} \Theta(y) e^{ys - \mu e^{y + i\theta_1}}\, dy.$$

La fonction $\Theta(y)$ est bornée supérieurement en module pour $y \geqslant \delta'$. Il est évident que quels que soient s_1 et s_2 fixés (avec $|s_1|$ et $|s_2|$ finis, et $\sigma_2 < \sigma_1$) d'une part l'intégrale

$$\int_{0}^{\infty} \Theta(y) e^{ys - \mu e^{y + i\theta_1}}\, dy$$

converge absolument quel que soit s de module fini et uniformément par rapport à s dans le demi-plan $\sigma \leqslant \sigma_1$, d'autre part l'intégrale (puisque $\delta' < 0$)

$$\int_{\delta'}^{0} \Theta(y) e^{ys - \mu e^{y + i\theta_1}}\, dy$$

est bornée supérieurement en module dans le demi-plan $\sigma \geqslant \sigma_2$ et est une fonction de la variable s holomorphe dans ce demi-plan.

L'intégrale $\int_\delta^\infty \varphi(z)(z-z_0)^{s-1}dz$ est donc une fonction entière $E(s)$ puisque σ_1 et σ_2 sont arbitraires. Réunissant les résultats ci-dessus, il en résulte que l'intégrale calculée le long du rayon $\arg(z-z_0)=\theta_1$,

$$\int_{0+}^\infty \varphi(z)(z-z_0)^{s-1}dz = \lim \int_{1/\rho'}^{\rho''} \cdots$$

(pour ρ' et $\rho'' \uparrow \infty$ indépendamment l'un de l'autre) existe sous les conditions précisées relatives à s. La convergence est uniforme par rapport à s dans chaque domaine borné de la bande $\eta' + \operatorname{Max} q'_r \leqslant \sigma \leqslant \sigma_1$, où $\eta' > 0$ est arbitraire petit fixé et $\sigma_1 > 0$ arbitraire grand fixé. La fonction $M\{\varphi;\ z_0,\ \theta_1|s\}$ est holomorphe dans le demiplan $\sigma > 1 + \operatorname{Max} q'_r$. On sait qu'il existe $\rho_0 > 0$ (et donc une infinité non dénombrable de tels nombres) tel que chaque développement taylorien

$$\psi_r(z) = \sum_0^\infty \gamma_n^r (z-z_0)^n, \qquad 0 \leqslant r \leqslant r_0,$$

converge uniformément sur le cercle fermé $\overline{c(z_0,\ \rho_0)}$ (il suffit de choisir le nombre positif ρ_0 inférieur au minimum des rayons de convergence des développements tayloriens ci-dessus). On suppose avoir choisi antérieurement $\delta \leqslant \rho_0$. En chaque point s du demi-plan $\sigma > \operatorname{Max} q'_r$, on a :

$$\int_0^\delta \varphi(z)(z-z_0)^{s-1}\,dz = \int_0^\delta \varphi_0(z)(z-z_0)^{s-1}\,dz + \sum_{r=0}^{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^r \int_0^\delta (z-z_0)^{n+s-q_r-1} \{\operatorname{Log}(z-z_0)\}^{p_r-1}\,dz$$

chaque intégrale étant calculée sur le segment d'origine z_0 et de longueur δ du rayon $\arg(z-z_0)=\theta_1$.

On pose $\rho = e^{-y}$ et on a :

$$\int_0^\delta (z-z_0)^{n+s-q_r-1}\{\operatorname{Log}(z-z_0)\}^{p_r-1}\,dz = \int_0^1 \cdots - \int_\delta^1 \cdots,$$

avec

$$\int_0^1 \ldots\, dz = e^{i\theta_1(n+s-q_r)} \int_0^\infty e^{-y(n+s-q_r)}(i\theta_1 - y)^{p_r-1}\,dy.$$

Sous la condition $\sigma > q'_r - n$ (évidemment satisfaite par le choix de s dans le demi-plan précisé ci-dessus), et la condition (4) (plus précisément sous la condition $p'_r > 0$ si $\theta_1 = 0$), quel que soit θ_1 réel fini, l'intégrale du second membre converge et c'est la transformée de Laplace de la fonction $(i\theta_1 - y)^{p_r - 1}$ calculée au point $n + s - q_r$; soit $L_{n,r}(s)$ cette fonction de s. Il est évident qu'elle se réduit à l'expression $\dfrac{(-1)^{p_r-1}\Gamma(p_r)}{(n+s-q_r)^{p_r}}$ lorsque $\theta_1 = 0$.

On a :

$$\int_{\delta}^{1} \ldots dz = e^{i\theta_1(n+s-q_r)} \int_0^{-\delta'} \ldots dy, \qquad \text{avec} \qquad \delta' < 0.$$

Sous la condition (4) et quel que soit θ_1 réel fini, cette dernière intégrale existe (plus précisément avec $p'_r > 0$ si $\theta_1 = 0$) en chaque point d'affixe s et définit une fonction entière $E_{n,r}(s)$ de cette variable s. (On rappelle qu'ici on a $|\theta_1| < \pi/2$.)

Réunissant les résultats, on a pour s avec $\sigma > \operatorname{Max} q'_r$:

$$\int_0^{\infty} \varphi(z)\,(z - z_0)^{s-1}\,dz = \sum_{r=0}^{r_0} \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^r e^{i\theta_1(n+s-q_r)} \{ L_{n,r}(s) - E_{n,r}(s) \} + \Phi(s) + E(s)$$

Remarque. — On calcule facilement la fonction $L_{n,r}(s)$ en utilisant le théorème des résidus; en considérant dans le plan de la variable complexe auxiliaire u le rectangle dont les sommets sont les points d'affixes 0, y_1, $i\theta_1$, $i\theta_1 + y_1$, avec $\mathrm{R}u = y$, on constate facilement que pour $y_1 \uparrow \infty$, on déduit :

$$L_{n,r}(s) = \int_0^{\infty} e^{-y(n+s-q_r)} (i\theta_1 - y)^{p_r - 1}\,dy = e_{n,r}(s) + \frac{(-1)^{p_r-1}\Gamma(p_r) e^{-i\theta_1(n+s-q_r)}}{(n+s-q_r)^{p_r}}$$

sous la condition $p'_r > 0$ et avec le choix $\sigma > q'_r$, quel que soit n entier positif ou nul.

En outre si $\theta_1 = 0$, on a $e_{n,r}(s) \equiv 0$.

L'ensemble des résultats ci-dessus s'énonce :

Dans le demi-plan $\sigma > \alpha$, la fonction $M\{\varphi;\, z_0,\, \theta_1 | s\}$ admet la représentation :

$$M\{\varphi;\, z_0,\, \theta_1 | s\} = \sum_{r=0}^{r_0} \sum_{n=0}^{N_r} \gamma_n^r \frac{e^{i\theta_1(n+s-q_r)}}{\Gamma(s)} \{ L_{n,r}(s) - E_{n,r}(s) \} + M_\alpha(s),$$

où $M_\alpha(s)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\sigma > \alpha$, et où N_r est le plus grand entier positif (pouvant se réduire à 0) inférieur à $q'_r - \alpha$.

Etude du cas où z_0 est régulier pour $\varphi(z)$.

On précise que sous la locution « z_0 régulier pour la fonction $\varphi(z)$ » on entend qu'il existe un cercle, de centre z_0 et de rayon positif, $c(z_0, \rho)$ tel que $\varphi(z)$ est holomorphe dans le domaine $\Sigma \cup c(z_0, \rho)$. Considérer le cas où z_0 est régulier pour $\varphi(z)$ revient à se limiter au cas particulier : $\varphi_0(z) \equiv 0$, $r_0 = 0$, $p_0 = 1$, q_0 entier négatif ou nul ; la fonction $\psi(z) = \varphi(z) = (z - z_0)^{-q_0}\psi_0(z)$ étant holomorphe dans le domaine $\Sigma \cup c(z_0, \rho)$. Les fonctions $E_{n,r}(s)$ se réduisent aux seules fonctions

$$E_{n,0}(s) = \int_0^{-\delta'} e^{-y(n+s-q_0)}\,dy = \frac{1 - e^{\delta'(n+s-q_0)}}{n+s-q_0}$$

et les fonctions $L_{n,r}(s)$ se réduisent aux fonctions

$$L_{n,0}(s) = e_{n,0}(s) + \frac{e^{-i\theta_1(n+s-q_0)}}{n+s-q_0}$$

avec

$$e_{n,0}(s) = \int_0^{i\theta_1} e^{-u(n+s-q_0)}\,du = \frac{1 - e^{-i\theta_1(n+s-q_0)}}{n+s-q_0}$$

c'est-à-dire que :

$$L_{n,0}(s) = \frac{1}{n+s-q_0}.$$

D'où la représentation (puisque $\varphi_0(z) \equiv 0$ entraîne $\Phi(s) \equiv 0$) :

$$M\{\varphi;\ z_0,\ \theta_1 | s\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n e^{(i\theta_1+\delta')(n+s-q_0)}}{\Gamma(s)(s+n-q_0)} + \frac{E(s)}{\Gamma(s)}$$

pour la transformée de Mellin calculée le long du rayon $\arg(z - z_0) = \theta_1$ de l'angle Σ.

Avec le choix antérieur de δ on a $-\delta' > \overline{\lim} \dfrac{\mathrm{Log}|\gamma_n|}{n}$; il en résulte que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n e^{n\delta'}}{\Gamma(s)(s+n-q_0)}$$

converge absolument quel que soit s, avec $|s|$ fini, puisque :

$$\lim\{\Gamma(s)(s+n-q_0)\} \quad \text{existe et est finie} \quad \neq 0$$

lorsque $\lim(s+n-q_0) = 0$; n entier fixé.

La somme de cette série est une fonction entière.

La fonction $M\{\varphi;\, z_0,\, \theta_1|s\}$ est une fonction entière de la variable s. Pour préciser l'ordre de cette fonction sur le demi-axe $\sigma < 0$, on constate que la fonction entière :

$$E(s) = e^{(is\theta_1 - z_0\mu)} \int_{\delta'}^{\infty} e^{ys}\Theta(y) e^{-\mu e^{y+i\theta_1}} dy,$$

puisque $\delta' < 0$, est du type exponentiel, pour $\sigma\downarrow -\infty$ sur chaque droite $\tau = \tau_0$ où τ_0 est une constante arbitraire fixée; on a $E(s) = 0(e^{\delta'\sigma})$ pour $\sigma\downarrow -\infty$ avec $\tau = \tau_0$. On considère :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_n e^{(i\theta_1 + \delta')(n-q_0)}}{\Gamma(s)(s+n-q_0)} = \sum_{n=0}^{r+q_0-1} \cdots + \gamma_{r+q_0} \frac{e^{(i\theta_1+\delta')r}}{\Gamma(s)(s+r)} + \sum_{n\geqslant r+q_0+1} \cdots.$$

Il est évident que les 1^{er} et 3^e termes du second membre sont nuls pour $s = -r$, r (entier positif) $\geqslant -q_0 + 1$. On a, en outre, $\lim \left\{\frac{1}{\Gamma(s)(s+r)}\right\} = (-1)^r\Gamma(1+r)$ pour $s \to -r$. Il en résulte pour $s \to -r$: $\lim M\{\varphi;\ z_0,\ \theta_1|s\} = (-1)^r\gamma_{r+q_0}\Gamma(1+r)$. Il est évident que $\gamma_r = o\,(e^{-\delta' r})$ pour $r\uparrow\infty$, puisque $\delta > 0$ est choisi inférieur au rayon de convergence du développement taylorien de $\psi_0(z)$ au point z_0. La formule des compléments pour la fonction $\Gamma(s)$ permet de constater tout aussi facilement que, pour s appartenant à la droite $s = \sigma + i\tau_0$, avec τ_0 fixé, $\sigma\downarrow -\infty$, on a :

$$M\{\varphi;\, z_0,\, \theta_1|s\} = 0(e^{\delta'\sigma}\Gamma(1-\sigma)).$$

Cette propriété est encore vraie dans toute demi-bande $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, $\sigma < \sigma_0$, uniformément par rapport à τ(σ_0, τ_1 et τ_2 étant des constantes arbitraires finies).

La fonction $M\{\varphi;\, z_0,\, \theta_1|s\}$ est d'ordre (R_-) égal à 0 dans chaque demi-bande $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, $\sigma < \sigma_0$ (τ_1, τ_2, σ_0 étant des constantes finies arbitraires).

Théorème II. 2. — *Dans la condition* (1) *du théorème* (II. 1) *et si le point z_0 est régulier pour la fonction $\varphi(z)$ holomorphe dans l'angle Σ, alors la transformée de Mellin,* $M\{\varphi;\, z_0,\, \theta_1|s\}$, *suivant le rayon* $\arg(z - z_0) = \theta_1$ *avec* $|\theta_1 - \theta_0| < \eta$, *est une fonction entière dont l'ordre* (R_-) *est nul dans chaque demi-bande* $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, $\sigma < \sigma_0$.

Particularisant le théorème II. 1 aux séries de Dirichlet générales, on peut énoncer :

THÉORÈME II. 3. — *Sous les conditions:*

1) *La série* $\varphi(s)=\sum_{1}^{\infty} b_p e^{-s\mu_p}$, *admet* $\sigma_A^{\varphi}<\infty$ *et* $\sigma_{\mathcal{H}_0}^{\varphi}=0$ (*on suppose* $\mu_1>0$);

2) *Au point* $s=0$ *la fonction* $\varphi(s)$ *admet une « dominante angulaire algébricologarithmique » dans un angle* Σ (*de sommet* $s=0$ *et d'ouverture* $|\arg s|<\eta$ *avec* $\eta>0$) *formé des éléments des types* (q_r, p_r-1), $0\leqslant r\leqslant r_0$;

3) *La fonction « dominée au point* $s=0$ *dans* Σ *est d'ordre* $-\alpha$;

4) $\operatorname{Min} p'_r>0$;

alors la transformée de Mellin $M\{\varphi;\, s\}\equiv M\{\varphi;\, 0,\, 0|\, s\}$ *de la fonction* $\varphi(s)$ *admet, dans le plan* $\sigma>\alpha$, *la représentation :*

$$M\{\varphi;\, s\}=\sum_{r=0}^{r_0}(-1)^{p_r-1}\sum_{n=0}^{N_r}\frac{\gamma_n^r}{\Gamma(s)}\left\{\frac{\Gamma(p_r)}{(n+s-q_r)^{p_r}}-E_{n,r}(s)\right\}+M_\alpha(s),$$

où les fonctions $E_{n,r}(s)$ *sont entières et où* $M_\alpha(s)$ *est holomorphe dans* $\sigma>\alpha$; N_r *étant le plus grand entier inférieur à* $q'_r-\alpha$; *les* γ_n^r *étant des constantes.*

Si $\varphi^\star(s)=\Sigma b_p e^{-s\mu_p^*}$, avec $\mu_p^*=\operatorname{Log}\mu_p$ et $0<\mu_p\uparrow\infty$, et si $\varphi(s)=\Sigma b_p e^{-s\mu_p}$, on a rappelé antérieurement que la relation classique,

$$\Gamma(s)\varphi^\star(s)=\int_0^\infty \varphi(x)x^{s-1}dx,$$

est légitime en tout point s (avec $|s|$ fini) du demi-plan $\sigma>\max(0,\, \sigma_A^{\varphi^*})$, et que $\sigma_A^{\varphi^*}<\infty$ entraîne $\sigma_A^{\varphi}\leqslant 0$; on sait aussi que $\sigma_C^{\varphi}<0$ entraîne $\sigma_C^{\varphi^*}=-\infty$, et que si $s=0$ est régulier pour $\varphi(s)$ alors $\varphi^\star(s)$ est une fonction entière si seulement $\sigma_C^{\varphi^*}<\infty$. (On rappelle d'autres résultats connus dans les remarques à la fin de ce chapitre.) On ne suppose pas ici que $\varphi(s)$ est une fonction de classe $\mathfrak{M}$. Particularisant encore davantage le théorème II. 1 on énonce :

THÉORÈME II. 4.. — *Sous la condition, la fonction* $\varphi^\star(s)$ *admet* $\sigma_A^{\varphi^*}<\infty$, *et les conditions* (2), (3), (4) *du théorème* II. 3, *alors la fonction* $\varphi^\star(s)$ *est identique à la fonction* $M\{\varphi;s\}$) *du théorème* II. 3.

Eu égard aux théorèmes II. 2 et II. 4. on énonce :

THÉORÈME II. 5. — *Si la fonction* $\varphi^\star(s)$ *définie par prolongement analytique de la somme de la série* $\Sigma b_p e^{-s\mu_p^*}$, *avec*

$\sigma_{\mathrm{A}}^{\varphi^*} < \infty$, *est une fonction entière, alors il suffit qu'il existe une demi-droite* $s = \sigma + i\tau_0$, $\sigma < \sigma_0$, *sur laquelle son ordre* $(\mathrm{R}\_)$ *est positif, pour que le point* $s = 0$ *soit singulier quasi-régulier pour la fonction* $\varphi(s)$.

Si la « dominée » au point z_0 dans Σ est régulière en ce point (par prolongement dans Σ) on énonce :

Théorème II. 6. — *Dans les conditions* (1, 2, 4) *du théorème* (II. 1) *et si la « dominée » est régulière au point* z_0 *alors dans la représentation de* $\mathrm{M}\{\varphi;\ z_0,\ \theta_1|s\}$ *obtenue dans ces conditions, la fonction* $\Phi(s)/\Gamma(s)$ *est entière et d'ordre* $(\mathrm{R}\_)$ *égal à* 0 *dans chaque demi-bande* $\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, $\sigma < \sigma_0$.

On montre en effet très facilement que $\Phi(s)$ est de la forme

$$\Phi(s) = e^{s(i\theta_1 + \delta')} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma'_n e^{n(i\theta_1 + \delta')}}{(s+n)}$$

où $\{\gamma'_n\}$ est la suite des coefficients du développement taylorien de la « dominée » au point z_0, et où $\delta' = \mathrm{Log}\ \delta$ avec $\delta > 0$ inférieur au rayon de convergence de ce développement et satisfaisant à la condition antérieure.

Remarques. — Le théorème II. 4 contient comme cas particuliers des résultats anciens dus à G. H. Hardy et M. Fekete, et repris par M. L. Cartwright.

I) Si la fonction « dominée » est identiquement nulle et si la « dominante » se réduit à un seul élément de type $(q, p - 1)$ avec q entier négatif ou nul et $p = 1$, on a dans chaque demi-plan $\sigma > \sigma'$, quel que soit σ' fixé :

$$\varphi^*(s) = \sum_{0}^{\mathrm{N}_{\sigma'}} \frac{\gamma_n e^{\delta'(n+s-q)}}{\Gamma(s)\,(s+n-q)} + \varphi^*_{\sigma'}(s),$$

où $\varphi^*_{\sigma'}(s)$ est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\sigma > \sigma'$ et où $\mathrm{N}_{\sigma'}$ est le plus grand entier inférieur à $q - \sigma'$. La fonction $\varphi^*(s)$ est entière.

II) Si la fonction « dominée » est identiquement nulle et si la « dominante » se réduit au seul élément de type $(q, p - 1)$ avec $p = 1$, alors $\varphi^*(s)$ est holomorphe dans le plan sauf peut-être aux points de la forme $q - n$ ou n est zéro ou un entier positif. Si q est un entier positif, les seuls pôles possibles sont les points $q, q - 1, q - 2, \ldots, 3, 2, 1$. Si q n'est pas un entier négatif ou zéro, c'est-à-dire si $\varphi(s)$ admet à l'origine un point

de branchement ou un pôle, alors $\varphi^*(s)$ admet nécessairement des pôles à distance finie. Ces résultats sont dûs à M. Fekete et G. H. Hardy.

III) Les théorèmes II. 3 et II. 4 sont des extensions aux séries de Dirichlet générales d'un résultat exprimé par M. L. Cartwright au sujet de la « réduction riemanienne des séries de Taylor aux séries de Dirichlet ordinaires ».

CHAPITRE III

On rappelle que si $\varphi(s)$ est la somme (ou son prolongement analytique à partir du demi-plan de convergence) d'une série de Dirichlet de type $\{\mu_n\}$ alors $\varphi^*(s)$ représente la somme (ou son prolongement) de la série associée de type $\{\mu_n^*\}$, avec $\mu_n^* = \operatorname{Log} \mu_n$ (la suite des coefficients étant la même pour les deux séries). Dans les deux théorèmes qui suivent la propriété « d'ordre O_M fini dans un demi-plan » à laquelle satisfait la fonction $\varphi^*(s)$ entraîne (comme on l'a vu dans le chapitre I) $\mu_1 \geqslant 1$.

Théorème III. 1. — *Si $\sigma_A^{\varphi^*} < \infty$ et si $\varphi^*(s)$ est à la fois holomorphe et « d'ordre O_M » fini dans le demi-plan $\sigma > \sigma^*$, avec $-\infty < \sigma^* < \sigma_A^{\varphi^*}$ (et notant Σ un angle ensemble des points s avec $|\arg s| \leqslant \eta$ et $0 < \eta < \pi/2$), alors il existe un polynôme $P(s)$ tel que : $\varphi(s) - P(s) = O(|s|^{-\sigma^* - \varepsilon})$, lorsque $|s| \downarrow 0$ avec $s \in \Sigma$ pour chaque $\varepsilon > 0$, suffisamment petit. Le polynôme $P(s)$ est identiquement nul si $\sigma^* \geqslant 0$.*

On rappelle un résultat classique : On sait que pour chaque valeur s, à l'exception de s réel négatif, on a :

$$\operatorname{Log} \Gamma(s) = (s - 1/2) \operatorname{Log} s - s + (1/2) \operatorname{Log}(2\pi) + \varepsilon(s),$$

où

$$\varepsilon(s) = (1/2) \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{p-1}{p(p+1)(s+r)^p}$$

et où on représente par Log s la branche principale du logarithme complexe de s (c'est-à-dire le prolongement analytique de la détermination qui est réelle pour s réel positif) dans le plan ouvert par la coupure constituée par le demi-axe réel négatif.

On pose $s = |s|e^{i\theta}$. Si le point d'affixe s appartient à l'ensemble $\mathcal{B}$ union des deux demi-bandes définies par $\sigma \in [c', c]$, $|\tau| > \tau_0 > 0$, $s = \sigma + i\tau$, où $c' < c$ et τ_0 sont des constantes finies, alors il existe un couple de constantes positives η et η' telles que $0 < \pi/2 - \eta < |\theta| < \pi/2 + \eta'$ si $s \in \mathcal{B}$ et on a $\tau\theta > 0$; on pose $|\theta| = \pi/2 + \nu$ et on a : $|s^{s-1/2}| = |s|^{\sigma - 1/2} . e^{-|\tau|(\pi/2+\nu)}$; en outre, on a $\varepsilon(s) = O(1/|\tau|)$, pour $|\tau| \uparrow \infty$, uniformément par rapport à $\sigma \in [c', c]$. Ainsi à ce couple de constantes, $c' < c$, arbitraires réelles fixées et à $\varepsilon > 0$ arbitraire fixé aussi petit qu'on veut on peut faire correspondre un ensemble $\mathcal{B}^*$ union des deux demi-bandes définies par :

$$\sigma \in [c', c], \qquad |\tau| > \tau^* > 0$$

et tel que :

$$|\Gamma(s)| < e^{-|\tau|(\pi/2 - \varepsilon)}$$

quel que soit $s \in \mathcal{B}^*$.

On choisit $\varepsilon_0 > 0$ de sorte que $\sigma^* + \varepsilon_0$ ne soit pas un entier négatif ou 0 et on considère le rectangle R de sommets $\sigma^* + \varepsilon_0 \pm i\mathrm{T}$, $c \pm i\mathrm{T}$, avec la constante $c > \max(0, \sigma_{\mathrm{A}}^{\varphi^*})$. On remarquera que σ^* soit ou non un entier négatif ou 0, on peut toujours choisir pour ε_0 tout nombre positif suffisamment petit. On pose $z = |z|e^{i\omega}$ avec $|z| \neq 0$ et $0 \leqslant |\omega| < \pi/2 - \varepsilon_1$ où ε_1 est une constante positive fixée arbitrairement petite. Notant $\operatorname{Log} z$ la branche principale du logarithme complexe de z, on constate (eu égard à la majoration de $|\Gamma(s)|$ dans $\mathcal{B}^*$) que :

$$\lim \int_{\sigma^* + \varepsilon_0 + i\mathrm{T}}^{c + i\mathrm{T}} \Gamma(s)\varphi^*(s) e^{-s \operatorname{Log} z}\, ds = 0, \qquad \text{pour} \quad |\mathrm{T}| \uparrow \infty,$$

l'intégrale étant calculée sur le segment joignant le point $\sigma^* + \varepsilon_0 + i\mathrm{T}$ au point $c + i\mathrm{T}$.

Représentons par $\langle \sigma^* \rangle$ le nombre d'entiers négatifs supérieurs à σ^* si $\sigma^* < -1$, et 0 si $-1 \leqslant \sigma^* < 0$ et posons $\mathrm{E}(s) = \dfrac{1}{\Gamma(s)}$. On a comme le montre un calcul facile :

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c - i\infty}^{c + i\infty} \Gamma(s)\varphi^*(s) z^{-s} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma^* + \varepsilon_0 - i\infty}^{\sigma^* + \varepsilon_0 + i\infty} \cdots + \mathrm{P}(z),$$

(cette relation d'inversion de la transformation de Mellin étant

légitime sous la condition $\sigma_{\Lambda}^{\varphi^*} < \infty$ et le choix $c > \max(0, \sigma_{\Lambda}^{\varphi^*})$), avec

$$P(z) \equiv \sum_{j=0}^{\langle\sigma^*\rangle} \frac{\varphi^*(-j)z^j}{E'(-j)}$$

et $P(z) \equiv 0$ si σ^* est non négatif.

Eu égard à la majoration utilisée pour $|\Gamma(s)|$ et à la propriété d'ordre fini de $\varphi^*(s)$ dans $\sigma > \sigma^*$, on a :

$$\int_{\sigma^*+\varepsilon_0-i\infty}^{\sigma^*+\varepsilon_0+i\infty} \Gamma(s)\varphi^*(s)z^{-s}\,ds = O(|z|^{-\sigma^*-\varepsilon_0}), \qquad \text{pour} \qquad |z|\downarrow 0,$$

lorsque z est intérieur à l'angle Σ, ensemble des points z avec $|\arg z| < \pi/2 - \varepsilon_1$.

Théorème III. 2. — *Sous les conditions :*

1) *La fonction* $\varphi(s)$ *est de classe* $\mathfrak{M}$,

2) *Il existe un nombre réel* α, *satisfaisant à* $\sigma_1^* \leqslant \alpha < \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi^*}$, *tel que dans le demi-plan* $\sigma > \alpha$ *la fonction* $\varphi^*(s)$ *est méromorphe et ne possède qu'un nombre fini de pôles tous d'affixes non nulles et non entières négatives, alors le point* $s = 0$ *est singulier pour* $\varphi(s)$ *et en outre, en ce point, la fonction admet une « dominante angulaire algébrico-logarithmique » dans tout angle* Σ *ensemble des points* s *avec* $|\arg s| < \pi/2 - \eta$, $\eta > 0$ *arbitraire petit.* (*La constante réelle* σ_1^* *ayant la signification précisée dans la définition d'une fonction de classe* $\mathfrak{M}$.)

Il est évident que les pôles de $\varphi^*(s)$ intérieurs au demi-plan $\sigma > \alpha$ sont tous situés dans la bande $\alpha < \sigma \leqslant \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi^*}$. On peut toujours supposer $\alpha \neq 0$ et non entier négatif puisque, si ce nombre α de l'hypothèse (2) ne satisfait pas à cette condition, on peut toujours trouver $\alpha' > \alpha$ tel que tous les pôles de $\varphi^*(s)$ du demi-plan $\sigma > \alpha$ (puisqu'il n'en existe qu'un nombre fini) appartiennent aussi au demi-plan $\sigma > \alpha'$.

Dans ce qui suit, pour la liaison avec l'énoncé du théorème on choisit z à la place de s pour représenter la variable indépendante dont dépend la fonction φ^*.

On sait que la relation,

$$\varphi(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(z)\varphi^*(z)s^{-z}\,dz$$

est légitime pour chaque s à distance finie dans le demi-plan $\sigma > 0$ et avec le choix de la constante

$$c > \max(0, x_{\Lambda}^{\varphi^*}), \qquad \text{où} \qquad Rz = x.$$

Eu égard à la condition (2) il existe une constante $c' \neq 0$ non entière négative telle que la fonction $\varphi^*(z)$:

1) ne possède qu'un nombre fini de pôles dans la bande $c' < x \leqslant x_{\mathcal{H}}^{\varphi^*}$; soient z_p, $1 \leqslant p \leqslant \mathrm{N}$, ces pôles d'ordre respectifs M_p;

2) est holomorphe sur l'axe $\mathrm{R}z = c'$;

3) ne possède pas d'autres points singuliers à distance finie dans le demi-plan $x \geqslant c'$ que les pôles z_p, $1 \leqslant p \leqslant \mathrm{N}$;

en outre il existe une constante $x_1^* < c'$ telle que :

4) la fonction $\varphi^*(z)$ est « d'ordre $\mathrm{O_M}$ » fini dans le demi-plan $x > x_1^*$.

On considère dans le plan de la variable z le rectangle ouvert R de sommets $c' \pm i\mathrm{Y}'$, $c \pm i\mathrm{Y}'$, où $\mathrm{Y}' > 0$ est choisi suffisamment grand de sorte que chaque $z_p \in \mathrm{R}$, $1 \leqslant p \leqslant \mathrm{N}$.

Si $c' < -1$ on représente par $\langle c' \rangle$ le plus grand entier positif inférieur à $|c'|$ ou 0 si $-1 < c' < 0$. La fonction $\Gamma(z)$ possède les pôles $0, -1, -2, \ldots$ à l'ordre 1. Si $c' < 0$ on a :

$$\Gamma(z) = \sum_{r=0}^{\langle c' \rangle} \frac{\Gamma_r}{z+r} + \Gamma_0(z),$$

où $\Gamma_0(z)$ est holomorphe dans le demi-plan $x > c'$; $\Gamma_r = \dfrac{(-1)^r}{\Gamma(r+1)}$ étant le résidu de $\Gamma(z)$ au pôle $-r$. On note $\{a_n^r\}$ la suite des coefficients du développement taylorien de $\varphi^*(z)$ au point $-r$, avec r entier. Le résidu de la fonction $\Gamma(z)\varphi^*(z)s^{-z}$ au point $z = -r$ est pour s quelconque dans le demi-plan $\sigma > 0$ égal à $a_0^r\,\Gamma_r s^r$.

Dans un voisinage $c(z_p, \rho)$, de centre z_p et de rayon $\rho > 0$ suffisamment petit, la fonction $\varphi^*(z)$ est de la forme :

$$\varphi^*(z) = \sum_{r=1}^{\mathrm{M}_p} \frac{\mathrm{A}_p^r}{(z-z_p)^r} + \varphi_p^*(z),$$

où $\varphi_p^*(z)$ est holomorphe dans le cercle $c(z_p, \rho)$ et où les A_p^r sont des constantes, avec $\mathrm{A}_p^{\mathrm{M}_p} \neq 0$.

Choisissant s à distance finie avec $\sigma > 0$ et pour $\mathrm{Log}\, s$ la branche principale, le théorème des résidus permet d'écrire si $c' < 0$:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathrm{R}\nearrow} \Gamma(z)\varphi^*(z)e^{-z\,\mathrm{Log}\,s}\,dz = \sum_{p=1}^{\mathrm{N}} \mathcal{R}_p\{\Gamma(z)\varphi^*(z)e^{-z\,\mathrm{Log}\,s}\} + \sum_{r=0}^{\langle c' \rangle} a_0^r\Gamma_r s^r$$

où $\mathcal{R}_p\{\Gamma(z)\varphi^*(z)e^{-z\,\mathrm{Log}\,s}\}$ désigne le résidu de la fonction entre crochets au pôle z_p. Dans le cercle $c(z_p, \rho)$, si $\rho > 0$ est suffisamment petit, on a :

$$s^{-z}\Gamma(z) = s^{-z_p}\sum_{r=0}^{\infty} \delta_p^r(z - z_p)^r,$$

avec

$$\delta_p^r = \sum_{h=0}^{r}(-1)^h \frac{\gamma_p^{r-h}(\mathrm{Log}\,s)^h}{\Gamma(h+1)},$$

où on note $\{\gamma_p^r\}$ la suite des coefficients du développement taylorien de $\Gamma(z)$ au point z_p.

Par conséquent, on a :

$$\mathcal{R}_p\{\Gamma(z)\varphi^*(z)s^{-z}\} = s^{-z_p}\sum_{r=1}^{M_p} \delta_p^{r-1}A_p^r.$$

En définitive, on a :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{R}\cdots = \sum_{p=1}^{N} s^{-z_p}\sum_{r=1}^{M_p} A_p^r \sum_{h=0}^{r-1}(-1)^h\frac{\gamma_p^{r-h-1}(\mathrm{Log}\,s)^h}{\Gamma(h+1)} + \sum_{r=0}^{\langle c'\rangle} a_0^r\Gamma_r s^r.$$

si $c' > 0$, alors le polynôme du second membre disparaît.

On considère le point $z = |z|e^{i\theta}$, avec $|\theta| < \pi$, $(\theta y > 0)$, à distance finie, intérieur au plan ouvert suivant la coupure $x \leqslant 0$, $y = 0$. Eu égard à l'expression rappelée pour $\mathrm{Log}\,\Gamma(z)$ et à l'ordre de $\varphi^*(z)$ dans le demi-plan $x > x_1^*$ on constate facilement qu'à $\eta > 0$ arbitraire petit fixé on peut faire correspondre un nombre positif fini Y_0, et qu'il existe des constantes positives M et η' telles que, pour $Y' > Y_0$, on a :

$$\left|\int_{c'\pm iY'}^{c\pm iY'}\Gamma(z)\varphi^*(z)s^{-z}\,dz\right| < M|Y'|^{\mu^*+\eta'}\int_{c'}^{c}|z|^{x-1/2}(|s|e)^{-x}e^{-Y'|\theta-\theta'|}\,dx$$

avec $s = |s|e^{i\theta'}$, $|s| \neq 0$ et $|\theta'| < \pi/2 - \eta$ (l'intégrale étant étendue à chacun des deux segments précisés de la frontière de R).

Soit une constante η'' telle que $0 < \eta'' < \eta$, on peut toujours lui faire correspondre un nombre positif Y_1 suffisamment grand (mais fini) tel que : $|\theta - \theta'| > \eta''$ pour tout point $z \in \mathcal{B}$, (avec $\theta - \theta' > \eta''$ pour $z \in \mathcal{B}$ et $y > 0$, et $\theta - \theta' < -\eta''$ pour $z \in \mathcal{B}$ avec $y < 0$) où $\mathcal{B}$ est l'ensemble union des deux demi-bandes :

$$\mathrm{R}z = x \in [c', c], \qquad |y| > Y_1.$$

En outre, on a $y(\theta - \theta') > 0$ lorsque z appartient aux deux segments joignant (avec correspondance des signes $+$ d'une part et des signes $-$ d'autre part) les points $c' \pm i\mathrm{Y}'$ aux points $c \pm i\mathrm{Y}'$, $\mathrm{Y}' > \mathrm{Y}_1$. Cette dernière remarque entraine (avec correspondance des signes) :

$$\int_{c' \pm i\mathrm{Y}'}^{c \pm i\mathrm{Y}'} \cdots = o(1) \quad \text{pour} \quad \mathrm{Y}' \uparrow \infty.$$

Il en résulte :

$$\lim \oint_{\mathrm{R}\nearrow} \Gamma(z)\varphi^*(z)s^{-z}\,dz = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \cdots - \int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \cdots$$

pour $\mathrm{Y}' \uparrow \infty$, et

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(z)\varphi^*(z)s^{-z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \cdots$$
$$+ \sum_{p=1}^{\mathrm{N}} s^{-z_p} \sum_{r=1}^{\mathrm{M}_p} \mathrm{A}_p^r \sum_{h=0}^{r-1} \cdots + \sum_{r=0}^{\langle c' \rangle} a_0^r \Gamma_r s^r.$$

Comme au théorème III. 1, on constate que :

$$\int_{c'-i\infty}^{c'+i\infty} \Gamma(z)\varphi^*(z)s^{-z}\,dz = \mathrm{O}(|s|^{-c'}) \qquad \text{pour} \qquad |s| \downarrow 0,$$

avec $s \in \Sigma$ (où Σ est l'ensemble des points s avec $|\arg s| < \pi/2 - \eta$, η arbitraire positif petit fixé). Cette intégrale est une fonction holomorphe dans le demi-plan $\sigma > 0$. On considère la fonction :

$$\psi(s) = \sum_{p=1}^{\mathrm{N}} \psi_p(s)s^{-z_p}$$

avec

$$\psi_p(s) = \sum_{r=1}^{\mathrm{M}_p} \mathrm{A}_p^r \sum_{h=0}^{r=1} \frac{(-1)^h \gamma_p^{r-h-1}(\mathrm{Log}\, s)^h}{\Gamma(h+1)},$$

pour s à distance finie dans le demi-plan $\sigma > 0$. On peut écrire :

$$\psi_p(s) = \sum_{h=0}^{\mathrm{M}_p - 1} \frac{(-1)^h(\mathrm{Log}\, s)^h}{\Gamma(h+1)} \sum_{r=h+1}^{\mathrm{M}_p} \mathrm{A}_p^r \gamma_p^{r-h-1}.$$

Il est impossible que la fonction $\psi_p(s)$ soit identiquement nulle, et ceci pour chaque indice p. En effet, la condition nécessaire et suffisante pour que $\psi_p(s) \equiv 0$ est que :

$$\sum_{r=h+1}^{\mathrm{M}_p} \mathrm{A}_p^r \gamma_p^{r-h-1} = 0$$

pour chaque entier h avec $0 \leqslant h \leqslant \mathrm{M}_p - 1$. L'ensemble des

M_p relations ci-dessus peut être considéré comme un système de M_p équations linéaires (p étant fixé) à M_p inconnues, x_p^r, satisfait par le sytème de solutions A_p^r, $1 \leqslant r \leqslant M_p$ (les A_p^r étant, eu égard à leur signification, non tous nuls). Le déterminant de ce système, est égal à $(\gamma_p^0)^{M_p} \neq 0$ puisque $\gamma_p^0 = \Gamma(z_p) \neq 0$. L'assertion est établie.

La fonction $s^{-z_p}\psi_p(s)$ possède au point $s = 0$ un élément singulier de type $(z_p,\ M_p - 1)$. Le point $s = 0$ est de poids $[x_p,\ M_p - 1]$ pour cette fonction. Si $c' > 0$, la « dominante » se réduit à la fonction $\psi(s)$. Si $c' < 0$ le polynôme peut être considéré comme un élément de poids $[-\infty, 0]$ de la dominante.

Remarque 1. — Chaque pôle z_p contribue à déterminer pour la dominante des éléments des types $(z_p,\ M_p - n - 1)$ avec $0 \leqslant n$ (entier) $\leqslant M_p - 1$; correspondant aux N pôles z_p il existe effectivement dans la dominante N éléments de poids $[x_p,\ M_p - 1]$, $1 \leqslant p \leqslant N$.

Remarque 2. — On peut démontrer un théorème analogue à III. 2 sans supposer les pôles d'affixes $\neq 0$ et non entières négatives (avec des modifications convenables si besoin est pour les assertions relatives aux types des éléments). Cette condition n'a été formulée que dans le but de simplifier quelque peu la démonstration.

CHAPITRE IV

$H_k[f, \varphi|s]$ représentant comme on l'a rappelé au chapitre I la fonction obtenue par application de l'opérateur Hadamard-Mandelbrojt au couple des fonctions composantes $f(s)$ et $\varphi(s)$, c'est-à-dire le prolongement analytique de la somme de la série $\Sigma a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-s\mu_n}$, on note $H_k^*[f, \varphi|s]$ la fonction définie par prolongement de la somme de la série associée, comme ci-dessus, de type $\{\mu_n^*\}$ et ayant la même suite de coefficients. Les notations relatives à la fonction $f \in \mathfrak{M}$ ont été introduites dans la définition. On précise maintenant en vue de ce qui suit celles relatives à $\varphi(s)$ si $\varphi \in \mathfrak{M}$; on a : $\sigma_A^{\varphi^*} < \infty$, $\sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi} = 0$; en outre, il existe $\sigma_2 < 0$ tel que $\varphi(s)$ est « d'ordre O_M » fini (égal à μ) dans le demi-plan $\sigma > \sigma_2$, et $\sigma_2^* < \sigma_{\mathcal{H}}^{\varphi^*}$ tel que $\varphi^*(s)$ est « d'ordre O_M » fini égal à μ^* dans le demi-plan $\sigma > \sigma_2^*$. On a $\sigma_A^f = \sigma_A^\varphi = 0$ puisque $\sigma_A^{f^*} < \infty$ entraîne $\sigma_A^f \leqslant 0$, et que $\sigma_{\mathcal{H}}^f = 0$ (et l'analogue pour la fonction $\varphi(s)$).

Lemme 1. — *Si les séries $f^*(s) = \Sigma a_n e^{-s\lambda_n^*}$ avec $\lambda_1^* \geqslant 0$ et $\varphi^*(s) = \Sigma b_n e^{-s\mu_n^*}$ possèdent respectivement des abscisses de convergence absolue $\sigma_A^{f^*}$ et $\sigma_A^{\varphi^*}$, finies, et si k est entier positif quelconque alors la série*

$$H_k^*[f, \varphi|s] = \Sigma a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-s\mu_n^*}$$

possède aussi une abscisse de convergence absolue, $\sigma_A^{H_k^*}$, $< \infty$.

Il est à remarquer qu'ici on a construit formellement la série du lemme à partir du couple des séries définissant les fonctions $f(s)$ et $\varphi(s)$, où k est un entier positif quelconque, en utilisant la définition de $a_{\mu_n}^{(k)}$ donnée au début du chapitre I, au moyen des trois suites $\{\lambda_n\}$, $\{\mu_n\}$, $\{a_n\}$ (sans assujettir ces fonctions à être de classe $\mathfrak{M}$).

On a :

$$a_{\mu_n}^{(k)} = \sum_{(\lambda_m^* < \mu_n^*)} (e^{\mu_n^*} - e^{\lambda_m^*})^k a_m$$
$$= e^{k\mu_n^*} \sum_{(\lambda_m^* < \mu_n^*)} a_m \sum_{p=k}^{\infty} d_p \frac{(\lambda_m^* - \mu_n^*)^p}{\Gamma(p+1)}.$$

On constate facilement que

$$d_p = \sum_{t=0}^{t=k} (-1)^t t^p C_k^t$$

avec

$$d_p = \begin{cases} 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant p \leqslant k-1 \\ (-1)^k \Gamma(k+1) \quad \text{pour} \quad p = k. \end{cases}$$

Par conséquent, on a :

$$a_{\mu_n}^{(k)} = e^{k\mu_n^*} \sum_{p=k}^{\infty} \frac{(-1)^p d_p}{\Gamma(p+1)} a_{\mu_n^*}^{(p)}$$

en posant

$$a_{\mu_n^*}^{(p)} = \sum_{\lambda_m^* < \mu_n^*} (\mu_n^* - \lambda_m^*)^p a_m.$$

La constante $a_{\mu_n^*}^{(p)}$ est le $n^{\text{ième}}$ coefficient d'ordre p de la fonction $f^*(s)$ par rapport à la suite $\{\mu_n^*\}$.

La majoration suivante est évidente :

$$\frac{|a_{\mu_n^*}^{(p)}|}{\Gamma(p+1)} < \frac{Ce^{c\mu_n^*}}{c^p} \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{|s|^{1+\eta}}, \qquad s = c + i\tau,$$

où $\eta > 0$ est arbitraire petit fixé, avec $c > \max(0, \sigma_A^{f^*})$ (C et c sont des constantes indépendantes de l'entier positif p), c'est-à-dire que :

$$|a_{\mu_n^*}^{(p)}| < \frac{C' \Gamma(p+1)}{c^p} e^{c\mu_n^*}.$$

On a, par conséquent :

$$\sum_n |a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-s\mu_n^*}| < C'' \sum_n \sum_p |b_n| \left(\frac{k}{c}\right)^p e^{-\mu_n^*(\sigma - c - k)}.$$

Si on choisit $c > \max(k, \sigma_A^{f^*})$ la condition ci-dessus pour c est à fortiori satisfaite et la série double converge sur le demi-axe $\sigma > c + \sigma_A^{\varphi^*} + k$. Il en résulte $\sigma_A^{H_k^*} < \infty$.

Notons $\mathfrak{S}_{\varphi^*, j}^{\sigma_1^*}$ l'ensemble composé de l'ensemble $\mathfrak{S}_{\varphi}^{\sigma_1^*}$ et du point d'affixe $-j$.

THÉORÈME IV. 1. — *Si les fonctions* $f(s) = \Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$ *et* $\varphi(s) = \Sigma b_n e^{-s\mu_n}$ *sont de classe* $\mathfrak{M}$, *alors la fonction* $\mathrm{H}_k^*[f, \varphi | s + k]$, *avec k (entier)* $> \nu^\star + \mu^\star$, *a pour seules singularités « possibles », par rapport au demi-plan* $\sigma > \sigma_2^* + \max[0, \sigma_{\mathcal{H}}^{f^*}(\sigma_1^*)]$ *les points de l'ensemble*

$$\Big(\bigcup_j \mathrm{S}_{\varphi^*, j}^{\sigma_2^*}\Big) \bigcup \overline{\mathrm{S}_{f^*\varphi^*}^{\sigma_1^*\sigma_2^*}}, \quad 0 \leqslant j \leqslant k.$$

Sous la seule condition que $\sigma_{\mathrm{A}}^f < \infty$ et $\sigma_{\mathrm{A}}^\varphi < \infty$ avec le choix de la constante $c > \max\,(0, \sigma_{\mathrm{A}}^f)$ et de k entier positif on sait qu'on a, pour z tel que $\mathrm{R}z > c + \sigma_{\mathrm{A}}^\varphi$:

$$\mathrm{H}_k[f, \varphi | z] = \frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s) \varphi(z-s) \frac{ds}{s^{1+k}}.$$

Du lemme antérieur on déduit (puisque ici f et φ étant de classe $\mathfrak{M}$, on a $\sigma_{\mathrm{A}}^{f^*} < \infty$ et $\sigma_{\mathrm{A}}^{\varphi^*} < \infty$) que $x_{\mathrm{A}}^{\mathrm{H}_k} \leqslant 0$. On remarquera aussi qu'on sait (théorème de S. Mandelbrojt) que $x_{\mathrm{A}}^{\mathrm{H}_k} \leqslant \max\,(\sigma_{\mathrm{A}}^\varphi, \sigma_{\mathrm{A}}^f + \sigma_{\mathrm{A}}^\varphi)$, et puisque les fonctions f et φ sont de classe $\mathfrak{M}$, il en résulte encore $x_{\mathrm{A}}^{\mathrm{H}_k} \leqslant 0$. Dans le demi-plan $\mathrm{R}z = x > 0$ on a :

$$\mathrm{H}_k[f, \varphi | z] = \Sigma a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-z\mu_n},$$

avec pour $a_{\mu_n}^{(k)}$ l'expression obtenue ci-dessus au moyen de la suite $\{a_{\mu_n^*}^{(p)}\}$. On considère la série

$$\mathrm{H}_k^*[f, \varphi | z] = \Sigma a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-z\mu_n^*}.$$

On a vu au lemme antérieur que pour tout point z à distance finie intérieur au demi-plan $\mathrm{R}z > c + \sigma_{\mathrm{A}}^{\varphi^*}$, avec $c > \max\,(\sigma_{\mathrm{A}}^{f^*}, k)$, la série double

$$\sum_n \sum_p \frac{(-1)^p d_p}{\Gamma(p+1)} a_{\mu_n^*}^{(p)} b_n e^{-z\mu_n^*}$$

est absolument convergente, et uniformément convergente dans chaque demi-plan $\mathrm{R}z > c + \sigma_{\mathrm{A}}^{\varphi^*} + \eta$, $\eta > 0$ arbitraire fixé. La permutation des signes de sommation est alors légitime dans le demi-plan $\mathrm{R}z > c + \sigma_{\mathrm{A}}^{\varphi^*}$ et on a, dans le demi-plan $\mathrm{R}z > c + \sigma_{\mathrm{A}}^{\varphi^*} + k$:

$$\mathrm{H}_k^*[f, \varphi | z] = \sum_{p=k}^{\infty} \frac{(-1)^p d_p}{\Gamma(p+1)} \mathrm{H}_p[f^*, \varphi^* | z-k]$$

où

$$\mathrm{H}_p[f^*,\ \varphi^*|z] = \frac{\Gamma(p+1)}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s)\varphi^*(z-s)\frac{ds}{s^{1+p}}.$$

Cette dernière intégrale a un sens lorsque z appartient au demi-plan $\mathrm{R}z > c + \sigma_{\mathrm{A}}^{\varphi^*}$ avec le choix $c > \max(0, \sigma_{\mathrm{A}}^{f^*})$. La permutation des signes $\sum$ et $\int$ est légitime (et il est facile d'ailleurs de prouver la légitimité de cette permutation) pour le choix antérieur de $c > \max(k, \sigma_{\mathrm{A}}^{f^*})$ et de z tel que $\mathrm{R}z > c + k + \sigma_{\mathrm{A}}^{\varphi^*}$, et on a :

$$\mathrm{H}_k^*[f,\ \varphi|z] = \frac{\Gamma(k+1)}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s)\omega_k(s)\varphi^*(z-s-k)\frac{ds}{s^{1+k}},$$

en posant

$$\omega_k(s) = \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)}\sum_{t=0}^{t=k}(-1)^t \mathrm{C}_k^t t^k \frac{s}{s+t}.$$

Remarquons qu'il est impossible de définir une constante réelle finie $\sigma_{\mathcal{C}}^{\omega_k}$ telle que, dans le demi-plan $\sigma > \sigma_{\mathcal{C}}^{\omega_k}$, la fonction $\omega_k(s)$ soit la somme d'une série de Dirichlet générale convergente (dont la suite des exposants est une suite réelle strictement croissante vers l'infini); en effet sur toute droite $\mathrm{R}s = \sigma$ (σ fixé), on a : $\lim \omega_k(s) = 1$, $|s|\uparrow\infty$. Cependant il est naturel d'écrire :

$$\mathrm{H}_k^*[f,\ \varphi|z] = \mathrm{H}_k[f^*\omega_k,\ \varphi^*|z-k],$$

puisque, entre autres raisons, on notera que l'assertion relative aux singularités « possibles » de la fonction de z définie par $\dfrac{\Gamma(k+1)}{2\pi i}\displaystyle\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(s)\varphi(z-s)\frac{ds}{s^{1+k}}$, dans le théorème fondamental de S. Mandelbrojt, est encore légitime même si les fonctions composantes $f(s)$ et $\varphi(s)$ n'admettent pas de représentations dirichletiennes; c'est-à-dire que la démonstration de cette partie de l'assertion du théorème repose avec le choix k (entier) $> \nu + \mu$ sur la propriété : les fonctions $f(s)$ et $\varphi(s)$ sont d'un « ordre $\mathrm{O_M}$ » fini ν et μ dans des demi-plans respectifs. (Cette remarque suppose une petite modification d'ailleurs évidente relative à la représentation de ces fonctions.) Remarquons encore que la fonction $f^*(s)\omega_k(s)$ est comme $f^*(s)$, « d'ordre $\mathrm{O_M}$ » égal à ν^* dans $\sigma > \sigma_1^*$. « L'ensemble singulier de $f^*(s)\omega_k(s)$

par rapport au demi-plan $\sigma > \sigma_1^*$ » que l'on note $\mathbf{S}_{f^*\omega_k}^{\sigma_1^*}$ satisfait, comme on peut le constater, à la relation d'appartenance :

$$\mathbf{S}_{f^*\omega_k}^{\sigma_1^*} \subset (\mathbf{S}_{f^*}^{\sigma_1^*} \cup \mathrm{E}), \qquad \text{où} \qquad \mathrm{E} = \cup(-j), \qquad \text{avec} \qquad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

Il est évident que l'ensemble composé, que l'on note $\mathbf{S}_{f^*\omega_k,\,\varphi^*}^{\sigma_1^*\sigma_2^*}$, des ensembles $\mathbf{S}_{f^*\omega_k}^{\sigma_1^*}$ et $\mathbf{S}_{\varphi^*}^{\sigma_2^*}$ satisfait alors à la relation d'appartenance :

$$\mathbf{S}_{f^*\omega_k,\,\varphi^*}^{\sigma_1^*\sigma_2^*} \subset \left(\mathbf{S}_{f^*\varphi^*}^{\sigma_1^*\sigma_2^*} \cup \left(\bigcup_j \mathbf{S}_{\varphi^*,\,j}^{\sigma_2^*}\right)\right), \quad 1 \leqslant j \leqslant k.$$

On a, par conséquent :

$$(\mathbf{S}_{\varphi^*}^{\sigma_2^*} \cup \mathbf{S}_{f^*\omega_k,\,\varphi^*}^{\sigma_1^*\sigma_2^*}) \subset \left(\mathbf{S}_{f^*\varphi^*}^{\sigma_1^*\sigma_2^*} \cup \left(\bigcup_j \mathbf{S}_{\varphi^*,\,j}^{\sigma_2^*}\right)\right), \quad 0 \leqslant j \leqslant k.$$

L'abscisse d'holomorphie par rapport au demi-plan $\sigma > \sigma_1^*$ de la fonction $f^*(s)\omega_k(s)$ est $\sigma_{\mathcal{H}}^{f^*\omega_k}(\sigma_1^*) \leqslant \max[-1,\ \sigma_{\mathcal{H}}^{f^*}(\sigma_1^*)]$ et donc $\max[0,\ \sigma_{\mathcal{H}}^{f^*\omega_k}(\sigma_1^*)] \leqslant \max[0,\ \sigma_{\mathcal{H}}^{f^*}(\sigma_1^*)]$. La conclusion du théorème résulte alors immédiatement de la relation d'appartenance ci-dessus par application du théorème de S. Mandelbrojt, avec le choix k (entier) $> \nu^* + \mu^*$, à la fonction $\mathrm{H}_k^*[f,\ \varphi|s+k]$.

Théorème IV. 2. — *Sous les conditions :*

1) *les fonctions $f(s)$ et $\varphi(s)$ sont de classe $\mathfrak{M}$;*

2) *le point $s = 0$ est quasi-régulier pour chacune des fonctions $f(s)$ et $\varphi(s)$, alors la fonction $\mathrm{H}_k^*[f,\ \varphi|s+k]$ est holomorphe dans le demi-plan $\sigma > \max[\sigma_2^*,\ \sigma_1^* + \sigma_2^*]$, où k (entier) $> \nu^* + \mu^*$.*

En effet les ensembles singuliers $\mathbf{S}_{\varphi^*,\,j}^{\sigma_2^*}$ et $\mathbf{S}_{f^*\varphi^*}^{\sigma_1^*\sigma_2^*}$ se réduisent respectivement aux droites $\sigma = \sigma_2^* - j$ et $\sigma = \sigma_1^* + \sigma_2^*$; d'où la conclusion ci-dessus.

Dans un certain système de conditions [voir II. 1, 2] le problème de la composition des singularités des séries de Dirichlet générales (associé à l'opérateur Hadamard-Mandelbrojt) se ramène à l'étude des singularités des fonctions définies par des sommes (finies ou de séries) de séries du type de Cramér, c'est-à-dire de la forme,

$$\sum_n \psi_n(s) \qquad \text{avec} \qquad \psi_n(s) = \sum_p b_p \theta_n(\mu_p) e^{-(s-\alpha_n)\mu_p},$$

où $\alpha_n \in \mathbf{S}_f^{\sigma_1}$; la fonction $f(s)$ étant la branche principale du prolongement analytique de la somme d'une des séries compo-

santes, $\Sigma a_n e^{-s\lambda_n}$, dans $\underset{\overline{P_f}}{\mathbf{C}\,\mathbf{S}_f^{\sigma_1}}$; l'autre fonction composante étant la branche principale du prolongement de $\varphi(s) = \Sigma b_n e^{-s\mu_n}$ dans $\underset{\overline{P_\varphi}}{\mathbf{C}\,\mathbf{S}_\varphi^{\sigma_2}}$, où $\overline{P_\varphi}$ est le demi-plan $\sigma \geqslant \sigma_2$. Si le point α_n est isolé dans $\mathbf{S}_f^{\sigma_1}$ et pôle d'ordre $M_n + 1$ de $f(s)$ alors $\theta_n(z)$ est un polynôme d'ordre M_n; si le point α_n isolé dans $\mathbf{S}_f^{\sigma_1}$ est essentiel pour $f(s)$ alors $\theta_n(z)$ est une fonction entière du type exponentiel minimum. Dans un mémoire récent [II. 3] j'ai énoncé des propriétés relatives à la localisation de certains types de points singuliers pour les fonctions définies par les séries du type Cramér. Le théorème qui suit, constitue un exemple de théorème de composition de points singuliers au voisinage desquels les fonctions composantes ne sont pas uniformes. A dessein dans cet exemple on se limite à la considération du point $s = 0$ qui est supposé « algébrico-logarithmique » de type $(q_1, p_1 - 1)$ et $(q_2, p_2 - 1)$ respectivement pour les deux fonctions composantes $f(s)$ et $\varphi(s)$. Sous ce « vocable » on entend que la « dominante » de la fonction $f(s)$ au point $s = 0$ dans tout angle $\Sigma(|\arg s| < \pi/2 - \eta)$, $\eta > 0$ arbitraire petit, se réduit au seul élément singulier de type $(q_1, p_1 - 1)$ où p_1 est entier $\geqslant 1$, et que la « dominée » est régulière au point $s = 0$ par prolongement analytique dans Σ (et l'analogue pour $\varphi(s)$). Si, en outre, on suppose que $f \in \mathfrak{M}$ alors l'ensemble singulier $\mathbf{S}_{f^*}^{\sigma_1^*}$ de $f^*(s)$ « par rapport » au demi-plan $\sigma > \sigma_1^*$ se réduit à la droite $\sigma = \sigma_1^*$ et aux pôles de la forme $q_1 - m$, m entier $\geqslant 0$ tel que $q_1' - m > \sigma_1^*$. La constante σ_1^* a dans le théorème qui suit (comme dans certains théorèmes antérieurs) la signification précisée dans la définition de la fonction $f \in \mathfrak{M}$.

Théorème IV. 3. — *Dans les conditions :*

a) *les fonctions $f(s)$ et $\varphi(s)$ sont des fonctions de classe $\mathfrak{M}$,*

b) *$s = 0$ est algébrico-logarithmique de type $(q_1, p_1 - 1)$ pour $f(s)$ et de type $(q_2, p_2 - 1)$ pour $\varphi(s)$,*

alors au point $s = 0$ la fonction $H_k[f, \varphi, |s]$, avec le choix de l'entier $k > \nu^* + \mu^*$ admet une dominante angulaire algébrico-logarithmique. Cette dominante possède un élément de type $(q_1 + q_2 + k, p_1 + p_2 - 2)$. (On suppose $q_1 \neq 0$ et non entier si $\sigma_1^* < 0$.)

On a obtenu au théorème (IV. 1) une représentation intégrale pour la fonction $H_k^*[f, \varphi | z]$. Eu égard au théorème fondamental de S. Mandelbrojt on sait que, avec un choix convenable de z (et le choix antérieur des constantes c et k) :

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s)\omega_k(s)\varphi^*(z-s-k)\,\frac{ds}{s^{1+k}} = \int_{C_{f^*\omega_k}(\varepsilon)} f^*\omega_k\varphi^*\,\frac{ds}{s^{1+k}}$$

(par exemple, on peut toujours choisir x' suffisamment grand de sorte que la relation est satisfaite pour z avec $Rz = x > x'$). L'intégrale du second membre ayant la signification précisée au chapitre I.

On note $c_{m,\varepsilon}$ la frontière du cercle de centre $q_1 - m$ (m entier $\geqslant 0$) et de rayon ε, $C_{0,\varepsilon}$ la droite $Rs = \sigma_1^* + \varepsilon$, $c'_{j,\varepsilon}$ la frontière du cercle de centre $-j$ (j entier $\geqslant 0$) et de rayon ε, m_0 le plus grand entier positif (pouvant se réduire à 0) tel que $q'_1 - m_0 > \sigma_1^*$, avec $q'_1 = Rq_1$; si $\sigma_1^* < 0$ on note j_0 le plus grand entier positif (pouvant se réduire à 0) tel que $-j_0 > \sigma_1^*$. La constante positive ε est choisie telle qu'on ait :

$$c_{m,\varepsilon} \cap c_{m',\varepsilon} = \emptyset \quad \text{si} \quad m \neq m', \; C_{0,\varepsilon} \cap c_{m,\varepsilon} = \emptyset \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant m \leqslant m_0 ;$$

si $\sigma_1^* < 0$ la constante ε devra en outre être choisie telle que :

$$C_{0,\varepsilon} \cap c'_{j,\varepsilon} = \emptyset \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant j \leqslant j_0 \qquad \text{et} \qquad c_{m,\varepsilon} \cap c'_{j,\varepsilon} = \emptyset$$

pour chaque couple d'entiers m, j.

Avec ce choix de ε, on constate facilement que l'égalité ci-dessus a encore lieu si on remplace l'ensemble $C_{f^*\omega_k}(\varepsilon)$ (où la constante ε n'est pas nécessairement la même que ci-dessus) défini au chapitre I par l'ensemble

$$C_{0,\varepsilon} \cup (C_\varepsilon \cup C'_\varepsilon), \qquad \text{où} \qquad C_\varepsilon = \bigcup_m c_{m,\varepsilon},$$

$$0 \leqslant m \leqslant m_0, \quad \text{et où} \quad C'_\varepsilon = \bigcup_j c'_{j,\varepsilon}, \quad 0 \leqslant j \leqslant j_0, \quad \text{si} \quad \sigma_1^* < 0$$

et seulement par $C_{0,\varepsilon} \cup C_\varepsilon$ si $\sigma_1^* \geqslant 0$. On a ainsi pour z appartenant à un demi-plan convenable (c'est-à-dire pour $Rz = x > x'$, x' suffisamment grand fini) :

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s)\omega_k(s)\varphi^*(z-s-k)\frac{ds}{s^{1+k}} = \int_{C_{0,\varepsilon}} \cdots + \int_{C_\varepsilon \cup C'_\varepsilon} \cdots$$

(égalité légitime si $\sigma_1^* < 0$; si $\sigma_1^* \geqslant 0$ la seconde intégrale n'est étendue qu'à l'ensemble C_ε) et

$$\int_{C_\varepsilon \cup C'_\varepsilon} f^* \omega_k \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} = \int_{C_\varepsilon} \cdots + \int_{C'_\varepsilon} \cdots = \sum_{m=0}^{m_0} \int_{c_{m,\varepsilon}} \cdots + \sum_{j=0}^{j_0} \int_{c'_{j,\varepsilon}} \cdots.$$

Dans $\sigma > \sigma_1^*$, on a (théorème II. 1 et suivants) :

$$f^*(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{m=0}^{m_0} \frac{B_m}{(s+m-q_1)^{p_1}} + f_1^*(s), \qquad \text{avec} \qquad B_0 \neq 0,$$

où $f_1^*(s)$ est une fonction holomorphe dans ce demi-plan. On a :

$$\frac{\omega_k(s)}{\Gamma(s)} \sum_{m=0}^{m_0} \frac{B_m}{(s+m-q_1)^{p_1}} = \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{r=1}^{p_1} \frac{D_m^r}{(s+m-q_1)^r} + f_0^*(s)$$

où les D_m^r sont des constantes. Les fonctions de la variable s, $f_0^*(s)$, $f_1^*(s)$, $\dfrac{\omega_k(s)}{s^{1+k}}$ et $\varphi^*(z-s-k)$ avec z convenablement choisi ($Rz = x > x'$ où x' est choisi suffisamment grand fini) sont régulières sur la fermeture de chaque cercle $c(q_1 - m, \varepsilon)$, avec $0 \leqslant m \leqslant m_0$. Il en résulte que :

$$\int_{c_{m,\varepsilon}} f_1^* \omega_k \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} = 0, \qquad 0 \leqslant m \leqslant m_0,$$

et

$$\int_{c_{m,\varepsilon}} \left(\frac{1}{\Gamma(s)} \sum_0^{m_0} \cdots \right) \omega_k \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} = \sum_{r=1}^{p_1} D_m^r \int_{c_{m,\varepsilon}} \frac{\varphi^*(z-s-k)\, ds}{(s+m-q_1)^r s^{1+k}}.$$

Les $A'^{j}_{r,m}$ et $A''^{j}_{r,m}$ étant des constantes convenables, on a :

$$\frac{1}{(s+m-q_1)^r s^{1+k}} = \sum_{j=1}^{r} \frac{A'^{j}_{r,m}}{(s+m-q_1)^j} + \sum_{j=1}^{1+k} \frac{A''^{j}_{r,m}}{s^j}.$$

On a (avec le choix de z antérieur) :

$$\int_{c_{m,\varepsilon}} \frac{\varphi^*(z-s-k)}{(s+m-q_1)^j} ds = \frac{(-1)^{j-1} 2\pi i}{\Gamma(j)} \varphi^{*(j-1)}_{(z-k-q_1+m)}$$

et

$$\int_{c_{m,\varepsilon}} \frac{\varphi^*(z-s-k)}{s^j} ds = 0$$

Il en résulte qu'il existe des constantes $C_{m,r}$ telles que :

$$\begin{aligned} \int_{C_\varepsilon} f^* \omega_k \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} &= 2\pi i \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{r=1}^{p_1} \sum_{j=1}^{r} \frac{(-1)^{j-1}}{\Gamma(j)} D_m^r A'^{j}_{r,m} \varphi^{*(j-1)}_{(z-k-q_1+m)} \\ &= \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{r=1}^{p_1} C_{m,r} \varphi^{*(r-1)}_{(z-k-q_1+m)}, \qquad \text{avec} \qquad C_{0,p_1} \neq 0. \end{aligned}$$

Choisissons z tel que $Rz = x > \sigma_1^* + \sigma_\Lambda^{\varphi^*} + k + \varepsilon$; on a :

$$\int_{C_{0,\varepsilon}} f^* \omega_k \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} = \sum_{p=1}^{\infty} b_p e^{-\mu_p^*(z-k)} \int_{\sigma_1^* + \varepsilon - i\infty}^{\sigma_1^* + \varepsilon + i\infty} f^* \omega_k e^{s\mu_p^*} \frac{ds}{s^{1+k}}.$$

Posons

$$\delta_p = i \int_{-\infty}^{\infty} f^*(s) \omega_k(s) e^{i\tau\mu_p^*} \frac{d\tau}{s^{1+k}}, \qquad s = \sigma_1^* + \varepsilon + i\tau.$$

La suite $\{|\delta_p|\}$ est bornée supérieurement. La série $\sum_1^\infty b_p \delta_p e^{-z\mu_p^*}$ converge absolument en chaque point du demi-plan $x > \sigma_\Lambda^{\varphi^*}$. Il s'agit de déterminer l'ensemble singulier par rapport à un demi-plan de la fonction analytique de z définie par cette série. On rappelle qu'on peut déterminer des constantes D_m^r de sorte que :

$$f^*(s)\omega_k(s) = f_2^*(s) + \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{r=1}^{p_1} \frac{D_m^r}{(s + m - q_1)^r}$$

où $f_2^*(s)$ est holomorphe dans le demi-plan $\sigma > \sigma_1^*$.

Pour z intérieur au demi-plan

$$x > \sigma_1^* + \sigma_\Lambda^{\varphi^*} + k + \varepsilon,$$

on a :

$$\int_{C_{0,\varepsilon}} f^* \omega_k \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} = \int_{C_{0,\varepsilon}} f_2^* \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} + \sum_m \sum_r D_m^r \int_{C_{0,\varepsilon}} \frac{\varphi^* \, ds}{(s + m - q_1)^r s^{1+k}}$$

On a aussi :

$$\int_{C_{0,\varepsilon}} \frac{\varphi^* \, ds}{(s + m - q_1)^r s^{1+k}} = \sum_{j=1}^{r} A'^{j}_{r,m} \int_{C_{0,\varepsilon}} \frac{\varphi^* \, ds}{(s + m - q_1)^j} + \sum_{j=1}^{1+k} A''^{j}_{r,m} \int_{C_{0,\varepsilon}} \frac{\varphi^* \, ds}{s^j}.$$

Il est bien connu que pour $\mu_p^* > 0$:

$$\int_{C_{0,\varepsilon}} \frac{e^{s\mu_p^*} \, ds}{(s + m - q_1)^j} = 0 \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant m \leqslant m_0,$$

puisque pour ces valeurs de l'entier m, on a $\sigma_1^* + m - q_1' + \varepsilon < 0$. Puisque les fonctions composantes $f(s)$ et $\varphi(s)$ sont de classe $\mathfrak{M}$, on a $\lambda_1 \geqslant 1$ et $\mu_1 \geqslant 1$. Il en résulte que le coefficient de $f(s)$ d'ordre k par rapport à $\{\mu_n\}$, non nul de plus petit indice, ne

peut être $a_{\mu_1}^{(k)} \neq 0$ que si $\mu_1 > 1$. Par conséquent le plus petit terme de la suite des exposants de la série $\Sigma a_{\mu_n}^{(k)} b_n e^{-s\mu_n}$ figurant effectivement dans cette série (c'est-à-dire associé à un coefficient non nul) est supérieur à 1.

Avec le choix antérieur de z, il en résulte :

$$\int_{C_{0,\varepsilon}} \frac{\varphi^* \, ds}{(s+m-q_1)^j} = 0, \qquad 0 \leqslant m \leqslant m_0.$$

On a pour j (entier) $\geqslant 1$:

$$\int_{C_{0,\varepsilon}} \frac{\varphi^*(z-s-k)}{s^j} ds = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \sigma_1^* + \varepsilon < 0 \\ 2\pi i \dfrac{(-1)^{j-1}}{\Gamma(j)} \varphi^{*(j-1)}_{(z-k)} & \text{si} \quad \sigma_1^* + \varepsilon > 0. \end{cases}$$

En remarquant que quelle que soit la constante finie σ_1^* on peut toujours choisir $\varepsilon > 0$ satisfaisant aux conditions antérieurement précisées et suffisamment petit de sorte que $\sigma_1^* + \varepsilon \neq 0$ et réunissant les résultats obtenus ci-dessus il en résulte que la fonction de z définie par le prolongement analytique de la somme de la série considérée (ou le prolongement analytique de la fonction de z définie par l'intégrale,

$$\int_{C_{0,\varepsilon}} f^*(s)\omega_k(s)\varphi^*(z-s-k)\frac{ds}{s^{1+k}},$$

à partir d'un point intérieur au demi-plan $x > \sigma_1^* + \sigma_A^{\varphi^*} + k + \varepsilon$) admet la représentation suivante légitime dans le demi-plan de convergence absolue de cette série (et dans un prolongement convenable) :

$$\int_{C_{0,\varepsilon}} \cdots = \int_{C_{0,\varepsilon}} f_2^*\varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} + \begin{cases} 0 \text{ si } \sigma_1^* + \varepsilon < 0, \\ 2\pi i \sum\limits_{j=1}^{1+k} D_j \varphi^{*(j-1)}_{(z-k)} \text{ si } \sigma_1^* + \varepsilon > 0 \end{cases}$$

où les D_j sont des constantes.

Les deux fonctions f_2^* et f^* sont du même « ordre O_M » égal à ν^* dans $\sigma > \sigma_1^*$; en outre $\sigma_{\mathcal{H}}^{f_2^*}(\sigma_1^*) = \sigma_1^*$ Dans le cas $\sigma_1^* < 0$ alors, eu égard au théorème de S. Mandelbrojt, la fonction de z

$$\int_{C_{0,\varepsilon}} f_2^*\varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} = \int_{C_{0,\varepsilon} \cup C'_{0,\varepsilon}} f_2^*\varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} - \frac{2\pi i}{\Gamma(k+1)} I_k(z),$$

avec

$$I_k(z) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j C_k^j f^{*(k-j)}_{2(0)} \varphi^{*(j)}_{(z-k)},$$

est analytique et ses seules singularités « possibles » dans le demi-plan $x > \sigma_1^* + \sigma_2^* + k$ sont les points de la fermeture de l'ensemble « somme composée » des ensembles $\mathfrak{S}_{f_2^*}^{\sigma_1^*}$ et $\mathfrak{S}_{\varphi^*, -k}^{\sigma_2^*}$ que l'on note $\overline{\mathfrak{S}_{f_2, \varphi^*, k}^{\sigma_1^* \sigma_2^*}}$ (on rappelle que $\mathfrak{S}_{\varphi^*, -k}^{\sigma_2^*}$ est l'ensemble « somme composée » de $\mathfrak{S}_{\varphi^*}^{\sigma_2^*}$ et du point d'affixe k).

On remarquera que $\mathfrak{S}_{f_2^*}^{\sigma_1^*}$ est identique à la droite $\sigma = \sigma_1^*$ et que $\mathfrak{S}_{f_2^*, \varphi^*, k}^{\sigma_1^* \sigma_2^*}$ contient la droite $\sigma = q_2' + \sigma_1^* + k$ et ne contient aucun point s avec $\sigma > q_2' + \sigma_1' + k$.

Il est évident que la définition de $\mathfrak{S}_{f_2^*}^{\sigma_1^*}$ suppose une petite modification (déjà vue au théorème IV. 1). Dans le cas $\sigma_1^* \geqslant 0$, cette intégrale admet pour singularités « possibles », dans le même demi-plan, les points de l'ensemble $\mathfrak{S}_{\varphi^*, -k}^{\sigma_2^*} \cup \overline{\mathfrak{S}_{f_2^*, \varphi^*, k}^{\sigma_1^* \sigma_2^*}}$. Cet ensemble contient la droite $\sigma = q_2' + \sigma_1^* + k$ et ne contient aucun point s avec $\sigma > q_2' + \sigma_1^* + k$.

Si $\sigma_1^* + \varepsilon < 0$, alors $C_\varepsilon' \neq \emptyset$; on a, dans le cas $\sigma_1^* < -1$:

$$\int_{C_\varepsilon'} f^* \omega_k \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} = \int_{c_{0,\varepsilon}'} \cdots + \sum_{j=1}^{j_0} \int_{c_{j,\varepsilon}'} \cdots,$$

$-j$, avec $1 \leqslant j \leqslant j_0$, est pôle simple de $\omega_k(s)$ et point régulier pour $\omega_k(s)$ $\dfrac{f^*(s)}{s^{1+k}}$; on a donc pour z convenablement choisi (avec x suffisamment grand)

$$\int_{c_{j,\varepsilon}'} f^* \omega_k \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} = 0$$

et

$$\int_{c_{0,\varepsilon}'} f^* \omega_k \varphi^* \frac{ds}{s^{1+k}} = \frac{2\pi i}{\Gamma(k+1)} \sum_{r=0}^{k} (-1)^r C_k^r \{f^* \omega_k\}_{s=0}^{(k-r)} \varphi^{*(r)}_{(z-k)}.$$

Des représentations obtenues pour les intégrales étudiées, on déduit immédiatement en réunissant les résultats que le point d'affixe $q_1 + q_2 + k$ est nécessairement singulier pour la fonction $H_k^*[f, \varphi | z]$; plus précisément il est pôle d'ordre $p_1 + p_2 - 1$. La fonction $H_k^*[f, \varphi | s]$ ne se réduisant pas à une fonction entière, et puisque $\sigma_A^{H_k^*}$ est fini, alors le point $s = 0$ est singulier pour la fonction $H_k[f, \varphi | s]$. En outre si $\sigma_1^* \geqslant 0$ alors dans le demi-plan $\sigma > \sigma_1^* + q_2' + k$ les seuls points singuliers pour la fonction $H_k^*[f, \varphi | s]$ sont les pôles

$q_1 + q_2 + k - m$ à l'ordre $p_1 + p_2 - 1$ au plus; le pôle $q_1 + q_2 + k$ étant d'ordre $p_1 + p_2 - 1$.

REMARQUE. — On peut obtenir plus rapidement au théorème IV. 3 un résultat un peu moins précis. Au lieu d'établir que $H_k[f, \varphi \mid s]$ possède au point $s = 0$ une dominante angulaire algébrico-logarithmique, on peut se limiter à établir que $s = 0$ est point singulier pour cette fonction sans préciser davantage la nature de ce point. On sait que $\sigma_A^{H_k} \leqslant 0$. L'application immédiate à la fonction $H_k[f^* \omega_k, \varphi^* \mid s - k]$ d'un théorème établi dans un mémoire antérieur (référence II. 1) permet de conclure que $H_k^*[f, \varphi \mid s]$ ne se réduit pas à une fonction entière. Il en résulte que $s = 0$ est singulier pour $H_k[f, \varphi \mid s]$.

BIBLIOGRAPHIE

I. [1] W. BERNSTEIN, Leçons sur les progrès récents de la théorie des séries de Dirichlet, Paris, 1933.

II. [1] M. BLAMBERT, Un problème de Composition des singularités des séries de Dirichlet générales, *Acta Mathematica*, t. 89, p. 217, 1953.

[2] M. BLAMBERT, Quelques théorèmes Faberiens relatifs au problème Hadamard-Mandlbrojt, *Rend. Circolo Mat. Palermo*, s. 2, t. III 1954.

[3] M. BLAMBERT, Sur les points singuliers des séries de Dirichlet d'une classe de Cramér, *Annales Ec. Norm. Sup.*, 1955.

[4] M. BLAMBERT, Quelques propriétés de répartition des singularités d'une série de Dirichlet générale en relation avec la nature de la suite des coefficients, *Publications Scientifiques de l'Université d'Alger*, 1956.

III. [1] R. JUNGEN, Sur les séries de Taylor n'ayant que des singularités algébrico-logarithmiques sur leur cercle de convergence, *Commentarii Math. Helv.*, v. 3, p. 226, 1931).

IV. [1] S. MANDELBROJT, Dirichlet Series. *The Rice Institute Pamphlet*, v. 31, 1944.

V. [1] R. WILSON, Functions with dominant singularities of the generalized algebraic-logarithmic type, *Proceedings Lond. Math. Soc.*, ser. 2, v. 42, 1937.

[2] R. WILSON, Functions with dominant singularities of the generalized algebraic-logarithmic type. (II): on the order of the Hadamard produit, *Proceedings of the Lond. Math. Soc.*, v. 43, 1937.

ACHEVÉ D'IMPRIMER
SUR LES PRESSES DE
L'IMPRIMERIE DURAND
A CHARTRES
LE 10 Août 1959

PAPIER OFFSET BLANC VII/I
DES PAPETERIES DE FRANCE

DÉPÔT LÉGAL : 3e TRIMESTRE 1959.
N° 3377.
Printed in France

Depuis 1949 les Annales de l'Université de Grenoble ont changé de forme :

— La partie mathématique et physique continue sous la rubrique ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER. Les « Travaux du laboratoire de Géologie » (adresse : 2, rue Très-Cloître) continuent à être publiés sous leur forme habituelle. Les « Travaux du laboratoire de Pisciculture » (adresse : rue Hébert) sont bi-annuels.

— La partie littéraire est remplacée par les « Publications de la Faculté des Lettres ». La « Revue de Géographie Alpine » continue.

— La Faculté de Droit publie des « Textes et Statistiques de la Faculté de Droit de Grenoble ».

Adresser les mandats et chèques concernant les ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER à M. le Trésorier des ANNALES de la Faculté des Sciences, Institut Fourier, Grenoble (Isère) (Compte de chèques postaux, Lyon 723-30).

Adresser les périodiques échangés avec les ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER, ainsi que la correspondance relative aux échanges, aux achats et à l'administration de cette revue à l'adresse suivante :

ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER
Place du Doyen Gosse,
Grenoble (Isère).

Le tome VIII des ANNALES DE L'INSTITUT FOURIER paraît exceptionnellement en deux fascicules.

Prix du Tome VIII complet.. . . . . 6 500 Fr.

Des tirages de l'article de M. LAURENT SCHWARTZ sont en vente au prix de. . . . . 3 000 Fr.

Prix des tomes antérieurs, I à VII, 1 500 Fr., 2 500 Fr., 4 500 Fr., 4 500 Fr., 7 000 Fr., 5 500 Fr., 6 500 Fr.
